

申请上海交通大学硕士学位论文

应用同伦分析方法求解若干力学和金融学问题

论文作者 钟晓旭

学 号 115010910238

指导教师 廖世俊教授

专 业 船舶与海洋工程

答辩日期 2018年1月16日



Submitted in total fulfilment of the requirements for the degree of Master  
in Naval Architecture and Ocean Engineering

# Homotopy Analysis Method for Several Problems in Mechanics and Finance

ZHONG XIAO-XU

Supervisor

Prof. LIAO SHI-JUN

SCHOOL OF NAVAL ARCHITECTURE, OCEAN & CIVIL ENGINEERING  
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY  
SHANGHAI, P.R.CHINA

Jan. 16th, 2018



# 应用同伦分析方法求解若干力学和金融学问题

## 摘 要

力学和金融学中存在着许多非线性方程, 获得这些方程的解析近似解具有重要的理论意义和实际应用价值。本文应用同伦分析方法成功求解了以下四类问题: (1) 任意水深的极限斯托克斯波问题; (2) 任意大均布外载荷作用下的大挠度圆薄板问题; (3) 大挠度后屈曲梁问题; (4) 6 种不同类型的倒向型/正倒向型随机微分方程。具体内容和结果如下所示:

- (I) 在流体力学中, 人们普遍认为斯托克斯波浪理论仅适用于无限/有限水深。对于浅水情况, 人们则常采用椭圆余弦波理论和孤立波理论。本文应用同伦分析方法对斯托克斯波的极限形式进行求解, 成功克服摄动方法在浅水中的局限性 (高阶傅里叶系数无法收敛), 给出了任意水深的极限斯托克斯波之高精度解, 论证了斯托克斯波理论对于任意水深的有效性。这说明, 无限/有限水深波理论, 椭圆余弦波理论和孤立波理论实际上均可被统一到有限水深波 (斯托克斯波) 理论中。此外, 本文求出深水中波浪的极限波陡的精确值为  $H_{max}/\lambda = 0.14108$ , 并首次给出极浅水深中波峰含有  $120^\circ$  尖角的波面, 证明了同伦分析方法对于强非线性问题的有效性。
- (II) 求解均布外载荷作用下的大挠度圆薄板方程是板壳理论中的经典问题。许多知名学者都对该问题进行过研究, 并提出了众多解析和数值方法。其中, 又以采用中心挠度为摄动变量的摄动小参数法和内插迭代法最为著名。本文应用同伦分析方法, 成功获得了任意大均布外载荷作用下的大挠度圆薄板方程之高精度解, 并发现三种传统方法 (摄动小参数法, 修正迭代法和内插迭代法) 实际上均为同伦分析方法的特例。值得注意的是, 摄动小参数法和修正迭代法均只对小载荷情形有效, 而内插迭代法对任意大均布外载荷均能给出收敛的结果。在同伦分析方法的框架中, 本文发现对任意大均布外载荷, 摄动小参数法的广义形式和修正迭代法

的广义形式均能给出收敛的结果，且同伦分析方法的计算效率远高于内插迭代法。这清晰地凸显出同伦分析方法的优越性和有效性。

- (III) 求解大挠度后屈曲梁方程是固体力学中的经典问题。高扬曾提出一个同时受轴向外压力和横向均布载荷作用的后屈曲梁模型，并指出：“该梁模型是个多解敏感问题，目前仅有三对偶方法能求出所有的解。”于是本文应用同伦分析方法对方程进行求解，发现同伦分析方法仅需在初始解中引入一个待定参数，即可轻易求出该问题所有的解析近似解，且结果与三对偶方法给出的数值解相吻合。这论证了同伦分析方法对于多解敏感问题的有效性。
- (IV) 求解倒向型/正倒向型随机微分方程是金融数学中的热点问题。然而，目前仅有少数几种数值方法可以有效求解低维的正倒向型随机微分方程。对于高维的正倒向型随机微分方程，研究几乎处于空白状态。本文应用同伦分析方法，成功求解了六种不同类型的倒向型/正倒向型随机微分方程。作者发现，对于其中一个高维线性的正倒向型随机微分方程，同伦分析方法可以很快给出 12 维情况下的解析近似解；在 6 维情况下，在达到相同计算精度的前提下，同伦分析方法的计算效率比最新报道的数值方法高 3000 余倍。这些均揭示了应用同伦分析方法求解倒向型/正倒向型随机微分方程的巨大潜力。

**关键词：**同伦分析方法，极限斯托克斯波，大挠度圆薄板，后屈曲梁，倒向型/正倒向型随机微分方程

# Homotopy Analysis Method for Several Problems in Mechanics and Finance

## ABSTRACT

There exist many nonlinear equations in mechanics and finance. Obtaining the analytic approximation solutions of these equations are of great meaning. In this paper, we apply the homotopy analysis method (HAM) for following four kinds of problems: the limiting Stokes wave with arbitrary water depth, the large deflection of a circular plate under arbitrary uniform pressure, the post-buckling problems and the backward/forward-backward stochastic differential equations. Main results are shown as following:

- (1) In this paper, accurate series solutions of the limiting Stokes wave with arbitrary water depth are successfully obtained by means of the HAM. To the best of author's knowledge, it is the first time to give accurate wave profile in extreme shallow water without using any extrapolation techniques. Therefore, in the frame of the HAM, the Stokes waves can be used as a unified theory for all kinds of waves, including periodic waves in deep and intermediate depth, cnoidal waves in shallow water and solitary waves in extremely shallow water. This enriches people's understanding of the steady periodic waves.
- (2) In this paper, we employ the HAM to solve the nonlinear equations governed by a large deformed circular thin plate under uniform pressure to arbitrary magnitude. Accurate series solutions are successfully obtained. Besides, we successfully prove that the three classic methods—the perturbation method with arbitrary perturbation quantity, the modified iteration method and the interpolation iterative method—are all the special cases of the HAM. Furthermore, in the frame of the HAM, we systematically discuss the importance of the convergence-control

parameter  $c_0$ , the effectiveness of using iteration technique and expanding the uniform pressure  $Q$  into the series of the central deflection.

- (3) The HAM is employed to solve a non-linear differential equation governed by a large deformed elastic beam with non-convex total potential energy. Our results agree well with the numerical solutions. More importantly, our strategy is easy to implement, which demonstrates HAM's validity for computational non-convex mechanics.
- (4) In this paper, the HAM is employed to solve some backward stochastic differential equations (BSDEs) and forward-backward stochastic differential equations (FBSDEs), including one with high dimensionality (up to 12 dimensions). By means of the HAM, convergent series solutions can be quickly obtained with high accuracy for a FBSDE in a 6-dimensional case, within less than 1/3000 CPU time used by a currently reported numerical method for the same case. Especially, as dimensionality enlarges, the increase of computational complexity for the HAM is not as dramatic as this numerical method. All of these demonstrate the validity and high efficiency of the HAM for the backward/forward-backward stochastic differential equations in science, engineering, and finance.

**KEY WORDS:** homotopy analysis method (HAM), limiting Stokes wave, circular thin plate, post-buckling beam, backward/forward-backward stochastic differential equations



## 目 录

摘要	i
ABSTRACT	iii
目录	v
插图索引	xiv
表格索引	xiv
<b>第一章 绪论</b>	<b>1</b>
1.1 极限斯托克斯波 . . . . .	1
1.2 均布外载荷作用下的大挠度圆薄板方程 . . . . .	2
1.2.1 微分形式 . . . . .	2
1.2.2 积分形式 . . . . .	7
1.3 后屈曲梁模型 . . . . .	8
1.4 倒向型/正倒向型随机微分方程 . . . . .	10
<b>第二章 应用同伦分析方法求解任意水深中的极限斯托克斯波</b>	<b>13</b>
2.1 极限斯托克斯波的数学描述 . . . . .	13
2.2 同伦分析方法求解步骤 . . . . .	16
2.3 无限水深中的结果 . . . . .	19
2.4 有限水深中的结果 . . . . .	23
2.5 小结 . . . . .	33
<b>第三章 应用同伦分析方法求解大挠度圆薄板方程</b>	<b>37</b>
3.1 求解微分形式的大挠度圆薄板方程 . . . . .	37

3.1.1	同伦分析方法求解步骤	38
3.1.2	结果	41
3.1.3	证明摄动方法为同伦分析方法的一个特例	47
3.1.4	证明修正迭代法为同伦分析方法的一个特例	52
3.1.5	小结	55
3.2	求解积分形式的大挠度圆薄板方程	55
3.2.1	给定外载荷 $Q$	55
3.2.2	给定中心挠度	60
3.2.3	小结	66
<b>第四章</b>	<b>应用同伦分析方法求解后屈曲梁模型</b>	<b>73</b>
4.1	固端/简单支承	73
4.1.1	同伦分析方法求解步骤	73
4.1.2	结果	75
4.2	两端简单支承	78
4.2.1	同伦分析方法求解步骤	78
4.2.2	结果	79
4.3	总结	81
<b>第五章</b>	<b>应用同伦分析方法求解倒向型/正倒向型随机微分方程</b>	<b>85</b>
5.1	求解倒向型随机微分方程	86
5.1.1	一维倒向型随机微分方程	87
5.1.2	带有 2 维 $y_t$ 的倒向型随机微分方程	92
5.1.3	带有 2 维布朗变量的倒向型随机微分方程	96
5.2	求解正倒向型随机微分方程	100
5.2.1	一维正倒向型随机微分方程	100
5.2.2	2 阶正倒向型随机微分方程	105
5.2.3	高维正倒向型随机微分方程	108
5.3	总结	112

---

第六章 全文总结	119
附录 A 公式 (2-12) - (2-14) 的详细推导	121
附录 B 证明公式 (5-88)	123
参考文献	125
致谢	135
攻读学位期间发表的学术论文目录	137



## 表格索引

2-1 无限水深中的极限斯托克斯波, $c_0 = -0.2$ , $r = 100$ , 使用初始猜测解 (2-25), 一阶同伦迭代方法在不同迭代次数所给出的计算结果 . . . . .	21
2-2 无限水深中的极限斯托克斯波, $c_0 = -0.2$ , 一阶同伦迭代方法取不同项数 $r$ 所给出的计算结果 . . . . .	21
2-3 极限斯托克斯波, $r_0 = 0.05$ , $c_0 = -0.2$ , $r = 5500$ , 采用一阶同伦迭代方法并将 (2-25) 作为初始猜测解所得到的结果 . . . . .	25
2-4 极限斯托克斯波, $r_0 = 0.05$ , $c_0 = -1.2$ , $r = 5500$ , 采用一阶同伦迭代方法并将 (2-28) 作为初始猜测解所得到的结果 . . . . .	25
2-5 极限斯托克斯波在不同水深中的结果 . . . . .	27
2-6 极限斯托克斯波, $r_0 = 0.99$ , 一阶同伦迭代方法取不同 $r$ 时的结果	28
2-7 极限斯托克斯波, 一阶同伦迭代方法在不同水深条件下所给出的波峰夹角 . . . . .	28
2-8 不同方法给出的极限斯托克斯波在不同水深中的 $H/\lambda$ 值 . . . . .	31
3-1 微分形式的大挠度圆薄板方程, 在固定夹紧边界条件下, $a = 5$ , 使用同伦非迭代方法并取 $c_0 = -0.28$ 的计算结果 . . . . .	42
3-2 微分形式的大挠度圆薄板方程, 在固定夹紧边界条件下, $a = 5$ , $N = 100$ , 使用同伦非迭代方法并取 $c_0 = -0.55$ 的计算结果 . . . . .	43
3-3 微分形式的大挠度圆薄板方程, 在固定夹紧边界条件下, 使用一阶同伦迭代方法得到的结果 . . . . .	45
3-4 微分形式的大挠度圆薄板方程, 在可移夹紧边界条件下, 使用一阶同伦迭代方法得到的结果 . . . . .	46
3-5 微分形式的大挠度圆薄板方程, 在简单支承边界条件下, 使用一阶同伦迭代方法得到的结果 . . . . .	46
3-6 微分形式的大挠度圆薄板方程, 在简单铰链支承边界条件下, 使用一阶同伦迭代方法得到的结果 . . . . .	47

3-7	积分形式的大挠度圆薄板方程, $Q = 5$ , 使用非迭代同伦分析方法得到的结果	57
3-8	积分形式的大挠度圆薄板方程, 给定不同的 $Q$ 值, 使用非迭代同伦分析方法得到的结果	57
3-9	积分形式的大挠度圆薄板方程, 给定不同的 $Q$ 值, 使用一阶同伦迭代方法得到的结果	58
3-10	积分形式的大挠度圆薄板方程, $a = 5$ , 使用非迭代同伦分析方法得到的结果	61
3-11	积分形式的大挠度圆薄板方程, 取不同 $a$ 值, 使用非迭代同伦分析方法得到的结果	62
3-12	积分形式的大挠度圆薄板方程, $a = 5$ , 使用一阶同伦迭代方法得到的结果	62
3-13	积分形式的大挠度圆薄板方程, 取不同 $a$ 值, 使用一阶同伦迭代方法得到的结果	63
4-1	大挠度后屈曲梁, 固端/简支边界, 使用同伦分析方法求出的第一支解	77
4-2	大挠度后屈曲梁, 固端/简支边界, 使用同伦分析方法求出的第二支解	77
4-3	大挠度后屈曲梁, 固端/简支边界, 使用同伦分析方法求出的第三支解	78
4-4	两端简单支承的大挠度后屈曲梁, 使用同伦分析方法求出的第一支解	81
4-5	两端简单支承的大挠度后屈曲梁, 使用同伦分析方法求出的第二支解	81
4-6	两端简单支承的大挠度后屈曲梁, 使用同伦分析方法求出的第三支解	83
5-1	一维倒向型随机微分方程, 同伦分析方法在不同阶数时求出的结果	92
5-2	带有 2 维 $y_t$ 的倒向型随机微分方程, 使用同伦分析方法在不同阶数时得到的结果	97

5-3 带有 2 维布朗变量的倒向型随机微分方程, 使用同伦分析方法 在不同阶数时得到的结果 . . . . .	100
5-4 正倒向型随机微分方程, 使用同伦分析方法在不同阶数时得到 的结果 . . . . .	105
5-5 2 阶正倒向型随机微分方程, 使用同伦分析方法在不同阶数时得 到的结果 . . . . .	108
5-6 4 维正倒向型随机微分方程, 使用同伦分析方法在不同阶数时得 到的结果 . . . . .	113
5-7 6 维正倒向型随机微分方程, 使用同伦分析方法在不同阶数时得 到的结果 . . . . .	113
5-8 8 维正倒向型随机微分方程, 使用同伦分析方法在不同阶数时得 到的结果 . . . . .	114
5-9 10 维正倒向型随机微分方程, 使用同伦分析方法在不同阶数时 得到的结果 . . . . .	114
5-10 12 维正倒向型随机微分方程, 使用同伦分析方法在不同阶数时 得到的结果 . . . . .	114





## 插图索引

1-1 大挠度圆薄板方程, 四种边界条件 . . . . .	3
1-2 后屈曲梁模型 . . . . .	9
2-1 极限斯托克斯波, 保角映射 . . . . .	14
2-2 极限斯托克斯波, 当 $r_0 = 0$ , $r = 100$ , $c_0 = -0.2$ 时, 误差与计算时间的关系曲线图 . . . . .	20
2-3 无限水深中的极限斯托克斯波, 收敛控制参数 $c_0$ 对结果收敛性的影响 . . . . .	22
2-4 无限水深中的极限斯托克斯波, 由一阶同伦迭代方法给出的所有傅里叶系数 . . . . .	23
2-5 极限斯托克斯波在无限水深中的波面图 . . . . .	24
2-6 极限斯托克斯波, $r_0 = 0.99$ 时, 用一阶同伦迭代方法求出的所有傅里叶系数 . . . . .	29
2-7 极限斯托克斯波在不同水深中的波面图 . . . . .	30
2-8 极限斯托克斯波, 拟合同伦分析方法得到的结果: $H/d \sim c^2/(gd)$ 和 $H/d \sim \lambda/d$ . . . . .	31
2-9 极限斯托克斯波, $H/\lambda \sim r_0$ . . . . .	32
2-10 极限斯托克斯波, $H/d \sim c^2/(gd)$ . . . . .	33
2-11 极限斯托克斯波, $H/d \sim \lambda/d$ . . . . .	34
2-12 极限斯托克斯波, $r_0 = 0.99$ 时, 比较不同方法给出的波面 . . . . .	35
3-1 微分形式的大挠度圆薄板方程, 在固定夹紧边界条件下, $a = 5$ , 采用同伦非迭代方法得到的第 25 阶误差曲线 . . . . .	41
3-2 微分形式的大挠度圆薄板方程, 在固定夹紧边界条件下, $a = 5$ , $N = 100$ , 采用一阶同伦迭代方法得到的第 7 阶误差曲线 . . . . .	43
3-3 微分形式的大挠度圆薄板方程, 迭代阶数 $M$ 对计算效率的影响 . . . . .	44

3-4	微分形式的大挠度圆薄板方程, 对比一阶同伦迭代方法与摄动方法和内插迭代法 . . . . .	68
3-5	微分形式的大挠度圆薄板方程, 在固定夹紧边界条件下, 由一阶同伦迭代方法给出的挠曲线 . . . . .	69
3-6	积分形式的大挠度圆薄板方程, $Q = 1000$ , 迭代阶数 $M$ 对计算效率的影响 . . . . .	70
3-7	大挠度圆薄板方程, 在固定夹紧边界条件下, $Q = 1000$ , 比较内插迭代法和一阶同伦迭代方法 (积分形式方程, 给定载荷; 积分形式和微分形式, 给定中心挠度) 的计算效率 . . . . .	71
3-8	积分形式的大挠度圆薄板方程, 在固定夹紧边界条件下, $c_0 \sim a$ (3-121) 和 $\theta \sim Q$ 的关系曲线图 . . . . .	72
4-1	大挠度后屈曲梁, 固端/简支边界, $\mathcal{E} \sim \sigma$ 的关系曲线图 . . . . .	76
4-2	固端/简支边界条件下的大挠度后屈曲梁之挠度曲线 . . . . .	79
4-3	两端简单支承的大挠度后屈曲梁, $\mathcal{E} \sim \sigma$ 的关系曲线图 . . . . .	80
4-4	两端简单支承的大挠度后屈曲梁, 不同阶数的 $\mathcal{E}$ 曲线图 . . . . .	82
5-1	一维倒向型随机微分方程, $\mathcal{E} \sim c_0$ 曲线图 . . . . .	91
5-2	一维倒向型随机微分方程, 比较 $t = 0, 0.25, 0.5, 0.75$ 时的同伦级数解与精确解 . . . . .	93
5-3	带有 2 维 $y_t$ 的倒向型随机微分方程, 比较 $t = 0, 0.25, 0.5, 0.75$ 时的同伦级数解与精确解 . . . . .	97
5-4	带有 2 维布朗运动的倒向型随机微分方程, 比较 $t = 0, 0.25, 0.5, 0.75$ 时的同伦级数解与精确解 . . . . .	101
5-5	正倒向型随机微分方程, $\mathcal{E} \sim c_0$ 曲线 . . . . .	104
5-6	4 维正倒向型随机微分方程, $\mathcal{E} \sim c_0$ 曲线 . . . . .	115
5-7	4 维正倒向型随机微分方程, 比较 $t = 0, 0.25, 0.5, 0.75$ 时的同伦级数解与精确解 . . . . .	116
5-8	高维正倒向型随机微分方程, 同伦分析方法和基于稀疏网络的谱方法的计算效率 . . . . .	117

# 第一章 绪论

## 1.1 极限斯托克斯波

求解二维斯托克斯波的极限形式是流体力学中的经典问题。许多数学家和力学家都曾研究过该问题，并提出了众多解析和数值方法 [1–24]。在解析近似方法中，又以摄动方法使用得最为广泛。

在 1847 年，Stokes [25, 26] 采用摄动方法，并以第一个傅里叶系数  $a_1$  作为摄动参数，对二维稳态重力波进行求解。Stokes [25, 26] 发现：在深水情况下，极限稳态重力波的波峰呈现  $120^\circ$  尖角。此外，Stokes [25, 26] 猜测：对于任意水深的稳态重力波，其极限形式的波面在波峰处应该都为  $120^\circ$  尖角。

在 1974 年，Schwartz [6] 同样采用 Stokes 的摄动方法 [25, 26]，并对于深水工况，计算至 70 阶。然而 Schwartz [6] 发现，随着波高  $H$  不断增加， $a_1$  会先增大后减小，即一个  $H$  可能会对应于两个  $a_1$ 。显然，第一个傅里叶系数  $a_1$  并不适合作为摄动参数。然后，Schwartz [6] 把  $\epsilon = H/2$  作为摄动参数，并分别在深水情况下计算至 117 阶，在有限水深情况下计算至 48 阶。Schwartz [6] 发现，若仅采用帕德近似，获得的摄动解仅在  $d/\lambda > 0.15$  收敛；若同时采用帕德近似和 Shanks 迭代  $e_1$  变换 [27]，收敛范围可扩大至  $d/\lambda > 0.057$ 。Schwartz [6] 猜测：“其摄动方法理论上应对于任意水深均有效，而现在之所以在浅水中失效，应该是由计算过程中的数值误差 (rounding-error) 造成的。”除此之外，Schwartz [6] 还指出：“该摄动方法无法直接给出精确的波面；波速平方  $c^2$  的级数展开式仅在小于最大波高 97% 的范围内收敛。”

在 1977 年，Cokelet [10] 使用

$$\epsilon = 1 - \frac{v_{crest}^2 v_{trough}^2}{c^4} \quad (1-1)$$

作为摄动参数 (其中： $v_{crest}$ 、 $v_{trough}$ 、 $c$  分别代表波峰速度，波谷速度和相速度)，并计算至 120 阶，发现：该摄动解的收敛范围为  $d/\lambda > 0.0168$ 。然而，Cokelet [10] 在文章中指出：“当  $d/\lambda < 0.11$  时，该摄动方法就已无法给出精确的波面。”在 2010 年，Dallaston 和 Mccue [28] 重新考察了 Schwartz [6] 和

Cokelet [10] 的计算格式, 并借助于 Maple 软件消除了所谓的数值误差, 然而即使如此, Dallaston and Mccue [28] 发现, Schwartz [6] 和 Cokelet [10] 的摄动方法仍然无法给出极浅水中, 极限斯托克斯波收敛的级数解。

据作者所知, 当前绝大多数的解析和数值方法均不得不依赖于一些外推技巧, 才能获得极限斯托克斯波较高精度的结果。然而在 1981 年, Williams [13] 提出了一种数值方法, 当  $d/\lambda > 0.0168$  时, 该方法不仅能给出高精度的结果, 也不需要采用任何的外推技巧。值得强调的是, 当前没有任何一种解析或数值方法能够精确地给出二维极限斯托克斯波在极浅水深中的精确波面, 本文旨在解决该问题。

同伦分析方法是求解强非线性问题的一种强有力手段 [29–41]。本文在同伦分析方法的框架中, 通过调节收敛控制参数  $c_0$ , 可以确保所有的傅里叶系数均收敛。因此, 本文不需要采用任何近似手段 (如外推技巧和帕德近似), 即可得到高精度的结果。此外, 本文通过引入迭代技巧来加速收敛, 成功求解了任意水深的极限斯托克斯波, 并首次给出极浅水深中二维斯托克斯波极限形式的波面, 并成功说明, 无限/有限水深波理论, 椭圆余弦波理论和孤立波理论均能统一到有限水深波 (斯托克斯波) 理论中。与 Schwartz [6] 和 Cokelet [10] 的摄动方法相比, 本文所采用的同伦分析方法不仅有效域更大, 方法也更加简便易行, 这些都很好的说明了同伦分析方法的有效性。

## 1.2 均布外载荷作用下的大挠度圆薄板方程

### 1.2.1 微分形式

均布外载荷作用下的大挠度圆薄板方程是固体力学中的经典问题, 其微分形式的控制方程为

$$y^2 \frac{d^2 \varphi(y)}{dy^2} - \varphi(y) S(y) - Qy^2 = 0, \quad (1-2)$$

$$y^2 \frac{d^2 S(y)}{dy^2} + \frac{1}{2} \varphi^2(y) = 0, \quad (1-3)$$

服从边界条件

$$\varphi(0) = S(0) = 0, \quad (1-4)$$

$$\varphi(1) = \frac{\lambda}{\lambda - 1} \cdot \frac{d\varphi(y)}{dy} \Big|_{y=1}, \quad S(1) = \frac{\mu}{\mu - 1} \cdot \frac{dS(y)}{dy} \Big|_{y=1}, \quad (1-5)$$

这里

$$y = \frac{r^2}{R_a^2}, \quad W(y) = \sqrt{3(1-\nu^2)} \frac{w(y)}{h}, \quad \varphi(y) = y \frac{dW(y)}{dy}, \quad (1-6)$$

$$S(y) = 3(1-\nu^2) \frac{R_a^2 N_r}{Eh^3} y, \quad Q = \frac{3(1-\nu^2) \sqrt{3(1-\nu^2)} R_a^4}{4Eh^4} p, \quad (1-7)$$

其中,  $r$  表示到板中心的径向距离;  $w(y)$ ,  $N_r$ ,  $E$ ,  $\nu$ ,  $R_a$ ,  $h$  和  $p$  分别代表板的挠度, 板的径向薄膜张力, 杨氏模量, 泊松比, 板的半径, 板厚和外加均布载荷; 参数  $\lambda$  和  $\mu$  与边界条件有关。由公式 (1-6), 可得无量纲的中心挠度

$$W(y) = - \int_y^1 \frac{1}{\varepsilon} \varphi(\varepsilon) d\varepsilon. \quad (1-8)$$

如图 1-1 所示, 本文共考虑以下四种边界条件

- (a) 固定夹紧:  $\lambda = 0$ ,  $\mu = 2/(1-\nu)$ ;
- (b) 可移夹紧:  $\lambda = 0$ ,  $\mu = 0$ ;
- (c) 简单支承:  $\lambda = 2/(1+\nu)$ ,  $\mu = 0$ ;
- (d) 简单铰链支承:  $\lambda = 2/(1+\nu)$ ,  $\mu = 2/(1-\nu)$ 。

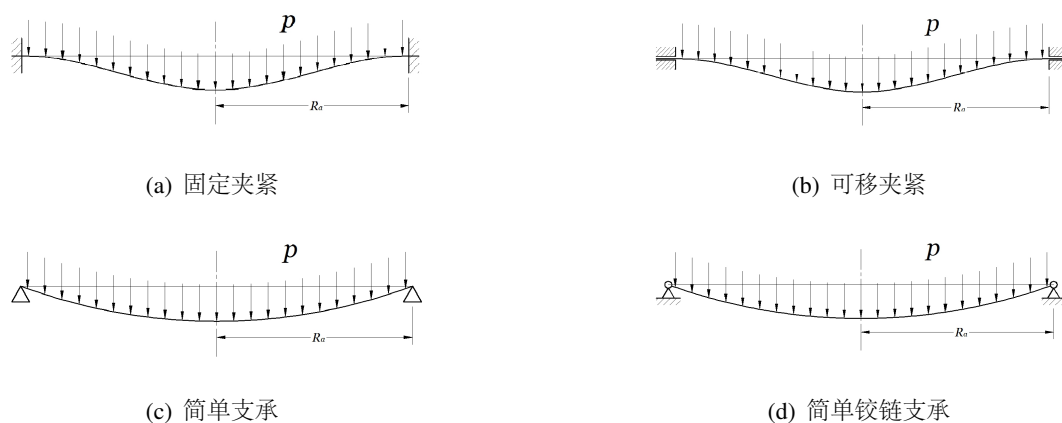


图 1-1 四种边界条件。

Fig. 1-1 Four types of boundary conditions.

在过去一百余年里, 科学家们提出了许多解析和数值方法来求解该问题 [42-53], 其中以 Vincent [54] 和钱伟长 [55] 的摄动方法尤为著名。在 1931 年,

Vincent [54]采用摄动方法，并把均布载荷  $Q$  作为摄动参数，得到如下摄动解

$$\begin{aligned}\varphi(y) &= \varphi^{(V)}(y) = \sum_{i=1}^{+\infty} \varphi_i^{(V)}(y) Q^{2i-1}, \\ S(y) &= S^{(V)}(y) = \sum_{i=1}^{+\infty} S_i^{(V)}(y) Q^{2i},\end{aligned}\tag{1-9}$$

这里， $\varphi_i^{(V)}(y)$  和  $S_i^{(V)}(y)$  满足

$$Q : \begin{cases} y^2 \frac{d^2 \varphi_1^{(V)}(y)}{dy^2} = y^2, & y \in (0, 1), \\ \varphi_1^{(V)}(0) = 0, & \varphi_1^{(V)}(1) = \frac{\lambda}{\lambda - 1} \frac{d\varphi_1^{(V)}(y)}{dy} \Big|_{y=1}; \end{cases}\tag{1-10}$$

$$Q^2 : \begin{cases} y^2 \frac{d^2 S_1^{(V)}(y)}{dy^2} = -\frac{1}{2} \left( \varphi_1^{(V)}(y) \right)^2, \\ S_1^{(V)}(0) = 0, & S_1^{(V)}(1) = \frac{\mu}{\mu - 1} \frac{dS_1^{(V)}(y)}{dy} \Big|_{y=1}; \end{cases}\tag{1-11}$$

.....

$$Q^{2i+1} : \begin{cases} y^2 \frac{d^2 \varphi_{i+1}^{(V)}(y)}{dy^2} = \sum_{j=1}^i \varphi_j^{(V)}(y) S_{i-j+1}^{(V)}(y), \\ \varphi_{i+1}^{(V)}(0) = 0, & \varphi_{i+1}^{(V)}(1) = \frac{\lambda}{\lambda - 1} \frac{d\varphi_{i+1}^{(V)}(y)}{dy} \Big|_{y=1}; \end{cases}\tag{1-12}$$

$$Q^{2i+2} : \begin{cases} y^2 \frac{d^2 S_{i+1}^{(V)}(y)}{dy^2} = -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{i+1} \varphi_j^{(V)}(y) \varphi_{i-j+2}^{(V)}(y), \\ S_{i+1}^{(V)}(0) = 0, & S_{i+1}^{(V)}(1) = \frac{\mu}{\mu - 1} \frac{dS_{i+1}^{(V)}(y)}{dy} \Big|_{y=1}. \end{cases}\tag{1-13}$$

取  $\lambda = 0$ ,  $\mu = 20/7$ , 则 Vincent [54] 摄动解为

$$\varphi_1^{(V)}(y) = -\frac{y}{2} + \frac{y^2}{2}, \quad (1-14)$$

$$S_1^{(V)}(y) = \frac{41y}{672} - \frac{y^2}{16} + \frac{y^3}{24} - \frac{y^4}{96}, \quad (1-15)$$

$$\varphi_2^{(V)}(y) = \frac{659y}{80640} - \frac{41y^2}{2688} + \frac{83y^3}{8064} - \frac{5y^4}{1152} + \frac{y^5}{768} - \frac{y^6}{5760}, \quad (1-16)$$

$$S_2^{(V)}(y) = -\frac{2357y}{1505280} + \frac{659y^2}{322560} - \frac{1889y^3}{967680} + \frac{103y^4}{96768} - \frac{59y^5}{161280} \\ + \frac{13y^6}{138240} - \frac{17y^7}{967680} + \frac{y^8}{645120}, \quad (1-17)$$

.....

然而该摄动解仅在中心挠度/板厚  $w(0)/h$  小于 0.52 时收敛。

在 1947 年, 钱伟长 [51, 55] 以中心挠度作为摄动参数, 得到如下摄动解

$$\begin{cases} \varphi(y) = \varphi^{(C)}(y) = \sum_{m=1}^{+\infty} \varphi_m^{(C)}(y) W^{2m-1}(0), \\ S(y) = S^{(C)}(y) = \sum_{m=1}^{+\infty} S_m^{(C)}(y) W^{2m}(0), \\ Q = Q^{(C)} = \sum_{m=1}^{+\infty} Q_m^{(C)} W^{2m-1}(0). \end{cases} \quad (1-18)$$

这里,  $\varphi_i^{(C)}(y)$  和  $S_i^{(C)}(y)$  满足

$$W(0) : \begin{cases} y^2 \frac{d^2 \varphi_1^{(C)}(y)}{dy^2} = Q_1^{(C)} y^2, \quad y \in (0, 1), \\ \varphi_1^{(C)}(0) = 0, \quad \varphi_1^{(C)}(1) = \frac{\lambda}{\lambda - 1} \frac{d\varphi_1^{(C)}(y)}{dy} \Big|_{y=1}, \\ - \int_0^1 \frac{1}{\epsilon} \varphi_1^{(C)}(\epsilon) d\epsilon = 1; \end{cases} \quad (1-19)$$

$$W^2(0) : \begin{cases} y^2 \frac{d^2 S_1^{(C)}(y)}{dy^2} = -\frac{1}{2} \left( \varphi_1^{(C)}(y) \right)^2, \\ S_1^{(C)}(0) = 0, \quad S_1^{(C)}(1) = \frac{\mu}{\mu - 1} \frac{dS_1^{(C)}(y)}{dy} \Big|_{y=1}; \end{cases} \quad (1-20)$$

$$\dots\dots\dots$$

$$W^{2i+1}(0) : \begin{cases} y^2 \frac{d^2 \varphi_{i+1}^{(C)}(y)}{dy^2} = \sum_{j=1}^i \varphi_j^{(C)}(y) S_{i-j+1}^{(C)}(y) + Q_{i+1}^{(C)} y^2, \\ \varphi_{i+1}^{(C)}(0) = 0, \quad \varphi_{i+1}^{(C)}(1) = \frac{\lambda}{\lambda-1} \frac{d\varphi_{i+1}^{(C)}(y)}{dy} \Big|_{y=1}, \\ - \int_0^1 \frac{1}{\epsilon} \varphi_{i+1}^{(C)}(\epsilon) d\epsilon = 0; \end{cases} \quad (1-21)$$

$$W^{2i+2}(0) : \begin{cases} y^2 \frac{d^2 S_{i+1}^{(C)}(y)}{dy^2} = -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{i+1} \varphi_j^{(C)}(y) \varphi_{i-j+2}^{(C)}(y), \\ S_{i+1}^{(C)}(0) = 0, \quad S_{i+1}^{(C)}(1) = \frac{\mu}{\mu-1} \frac{dS_{i+1}^{(C)}(y)}{dy} \Big|_{y=1}; \end{cases} \quad (1-22)$$

取  $\lambda = 0$ ,  $\mu = 20/7$ , 则摄动解为

$$\varphi_1^{(C)}(y) = -2y + 2y^2, \quad (1-23)$$

$$s_1^{(C)}(y) = \frac{41y}{42} - y^2 + \frac{2y^3}{3} - \frac{y^4}{6}, \quad (1-24)$$

$$\varphi_2^{(C)}(y) = \frac{233y}{1890} - \frac{2179y^2}{3780} + \frac{83y^3}{126} - \frac{5y^4}{18} + \frac{y^5}{12} - \frac{y^6}{90}, \quad (1-25)$$

$$s_2^{(C)}(y) = -\frac{211y}{19845} + \frac{233y^2}{1890} - \frac{529y^3}{2268} + \frac{667y^4}{3240} - \frac{59y^5}{630} \\ + \frac{13y^6}{540} - \frac{17y^7}{3780} + \frac{y^8}{2520}, \quad (1-26)$$

.....

其收敛域为  $w(0)/h < 2.44$ , 国际上称此方法为“钱伟长法”。值得强调的是, 在 1981 年, 陈山林 [56] 又考察比较了诸多摄动参数, 发现: 以中心挠度为摄动参数的摄动方法最为有效, 即收敛域最大。也就是说, 所有的摄动方法均只适用于小均布载荷 (方程为弱非线性)。

1965 年, 叶开沅和刘人怀 [57] 在“钱伟长法”的基础上, 提出了一种修正迭代法, 迭代步骤如下所示:

控制方程为:

$$y^2 \frac{d^2 \psi_n(y)}{dy^2} = -\frac{1}{2} \vartheta_n^2(y), \quad (1-27)$$

$$y^2 \frac{d^2 \vartheta_{n+1}(y)}{dy^2} = \vartheta_n(y) \psi_n(y) + Q_n y^2, \quad (1-28)$$



服从边界条件

$$\vartheta_{n+1}(0) = \psi_n(0) = 0, \quad (1-29)$$

$$\vartheta_{n+1}(1) = \frac{\lambda}{\lambda-1} \cdot \frac{d\vartheta_{n+1}(y)}{dy} \Big|_{y=1}, \quad \psi_n(1) = \frac{\mu}{\mu-1} \cdot \frac{d\psi_n(y)}{dy} \Big|_{y=1}, \quad (1-30)$$

和限制条件

$$W(0) = a = - \int_0^1 \frac{1}{\varepsilon} \vartheta_{n+1}(\varepsilon) d\varepsilon \quad (1-31)$$

初始解取

$$\vartheta_1(y) = \frac{-2a}{2\lambda+1} [(\lambda+1)y - y^2]. \quad (1-32)$$

虽然修正迭代法的收敛速度远快于“钱伟长法”，然而周又和 [58] 发现，修正迭代法 [57] 和“钱伟长法” [55] 的收敛区域一致。换句话说，修正迭代法也仅适用于小均布载荷。

本文应用同伦分析方法成功求解了任意大均布外载荷作用下的大挠度圆薄板之微分形式，并成功证明，摄动法和修正迭代法 [57] 实际上均为同伦分析方法在收敛控制参数  $c_0 = -1$  的特例。此外，在同伦分析方法框架中，我们发现，对于任意大均布外载荷，摄动法的广义形式和修正迭代法的广义形式均能给出收敛的结果。这清晰地显示出收敛控制参数  $c_0$  在同伦分析方法框架中的重要地位。

### 1.2.2 积分形式

均布外载荷作用下的大挠度圆薄板方程还有一种等价的积分方程形式，控制方程为

$$\varphi(y) + \int_0^1 \frac{1}{\varepsilon^2} K(y, \varepsilon) S(\varepsilon) \varphi(\varepsilon) d\varepsilon + \int_0^1 K(y, \varepsilon) Q d\varepsilon = 0, \quad (1-33)$$

$$S(y) - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{\varepsilon^2} G(y, \varepsilon) \varphi^2(\varepsilon) d\varepsilon = 0, \quad (1-34)$$

这里，

$$K(y, \varepsilon) = \begin{cases} (\lambda-1)y\varepsilon + y, & y \leq \varepsilon, \\ (\lambda-1)y\varepsilon + \varepsilon, & y > \varepsilon, \end{cases} \quad (1-35)$$

$$G(y, \varepsilon) = \begin{cases} (\mu-1)y\varepsilon + y, & y \leq \varepsilon, \\ (\mu-1)y\varepsilon + \varepsilon, & y > \varepsilon, \end{cases} \quad (1-36)$$

其中,  $r$ 、 $w(y)$ 、 $N_r$ 、 $E$ 、 $\nu$ 、 $R_a$ 、 $h$ 、 $p$ 、 $\lambda$ 、 $\mu$  和  $W(y)$  的定义与 1.2.1 节中一致。

在 1958 年, Keller 和 Reiss [59] 提出了一种内插迭代方法, 通过调节其中的内插迭代因子  $\theta$ , Keller 和 Reiss [59] 成功获得了  $Q = 7000$  的收敛级数解。迭代步骤如下所示:

$$\begin{cases} \psi_n(y) = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{\varepsilon^2} G(y, \varepsilon) \vartheta_n^2(\varepsilon) d\varepsilon, \\ \vartheta_{n+1}(y) = (1 - \theta) \vartheta_n(y) - \theta \int_0^1 K(y, \varepsilon) Q d\varepsilon \\ \quad - \theta \int_0^1 \frac{1}{\varepsilon^2} K(y, \varepsilon) \vartheta_n(\varepsilon) \psi_n(\varepsilon) d\varepsilon, \end{cases} \quad (1-37)$$

初始解取

$$\vartheta_1(y) = -\frac{Q\theta}{2} [(\lambda + 1)y - y^2], \quad (1-38)$$

这里  $\theta$  为内插迭代因子。在 1988 年, 郑晓静和周又和 [51, 60] 成功证明了内插迭代法的收敛性, 即: 对于给定的任意大均布外载荷, 通过调节合适的内插迭代因子, 内插迭代法总能给出收敛的级数解。钱伟长对此工作高度评价 – “解决了自 1910 年以来国际力学界未能解决的一个重要问题”。

本文应用同伦分析方法不仅成功求解了任意大均布外载荷作用下的大挠度圆薄板之积分形式, 还成功证明, 内插迭代法也为同伦分析方法的一个特例。这也间接证明了对于任意大给定的均布外载荷, 同伦分析方法都能给出收敛的级数解 (至少在某些条件下, 如: 取与内插迭代法相同的参数)。此外, 本文还发现求解微分形式的同伦分析方法同样是求解积分形式的同伦分析方法的一个特例。从而不难理解, 为什么对于任意大均布外载荷, 求解微分形式的同伦分析方法均能给出收敛的解。而且在保证收敛的情况下, 同伦分析方法的收敛速度远快于内插迭代法, 这充分说明了同伦分析方法的有效性和优越性。

### 1.3 后屈曲梁模型

Gao [61–63] 曾提出许多后屈曲梁模型, 其中一个的控制方程为

$$EIw''''(x) - \alpha E [w'(x)]^2 w''(x) + E\lambda w''(x) - f(x) = 0, \quad (1-39)$$

这里,

$$\begin{cases} I = \frac{2h^3}{3}, & \lambda = \frac{(1+\nu)(1-\nu^2)p}{E}, \\ \alpha = 3h(1-\nu^2), & f(x) = (1-\nu^2)q(x), \end{cases} \quad (1-40)$$

$w(x)$ 、 $\nu$ 、 $E$ 、 $h$ 、 $L$ 、 $p$  和  $q(x)$  分别代表在坐标  $x$  处的横向位移, 泊松比, 杨氏模量, 梁的高度, 梁的长度, 在  $x = L$  处的轴向外压力和梁的横向分布载荷。梁模型如图 1-2 所示。Gao 在文 [63] 中明确指出: 后屈曲梁模型 (1-39) 存

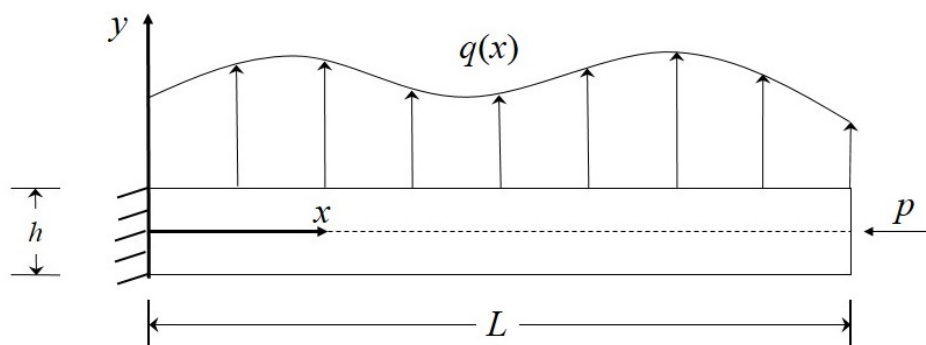


图 1-2 后屈曲梁模型。

Fig. 1-2 Beam model

在多解, 而且这些解对轴向力  $\lambda$  和横向分布载荷  $f(x)$  极为敏感, 因而一般的数值方法很难求出所有的解。

不失一般性, 本文考虑以下两种边界条件

(a) 固端/简单支承:

$$w(0) = w(L) = w'(0) = w''(L) = 0; \quad (1-41)$$

(b) 两端简单支承:

$$w(0) = w(L) = w''(0) = w''(L) = 0. \quad (1-42)$$

在同伦分析方法框架中, 本文在初始解里引入一个未知参数, 通过同时调节该参数和收敛控制参数, 本文成功获得以上两种边界条件的后屈曲梁模型的所有解析近似解。此方法简便易行, 进一步说明了同伦分析方法对于多解敏感问题的有效性。

## 1.4 倒向型/正倒向型随机微分方程

倒向型随机微分方程 (backward stochastic differential equations, BSDE) 在金融、科学和工程领域中广泛存在, 可以用来描述股票市场, 随机控制和化学合成等现象。倒向型随机微分方程的一般形式为

$$\begin{cases} -dy_t = f(t, y_t, z_t)dt - z_t dW_t, & 0 \leq t \leq T, \\ y_T = \xi, \end{cases} \quad (1-43)$$

这里:  $W_t = (W_t^1, \dots, W_t^d)^*$  是一个定义在完备概率空间  $(\Omega, \mathcal{F}, P, \{\mathcal{F}_t\}_{0 \leq t \leq T})$  上的  $d$  维布朗变量;  $T > 0$  表示确定的终端时间;  $*$  为矩阵的转置符号。在金融领域中,  $y_t$  和  $z_t$  分别代表  $t$  时刻的动态价格和风险指标。

正倒向型随机微分方程 (forward backward stochastic differential equations, FBSDE) 则由给定初始条件的正向随机微分方程 (SDE) 和给定终端条件的倒向型随机微分方程组成。在 1990 年, Pardoux 和彭实戈 [64] 证明了非线性倒向型随机微分方程解的存在性和唯一性, 奠定了正倒向型随机微分方程的理论基础。在 1991 年, 彭实戈 [65, 66] 进一步证明了, 在某些限定条件下, 正倒向型随机微分方程可以等效为一种二阶拟线性随机微分方程。从那以后, 倒向型/正倒向型随机微分方程开始受到学术界的广泛关注 [67-73]。在完备的概率空间  $(\Omega, \mathcal{F}, P, \{\mathcal{F}_t\}_{0 \leq t \leq T})$  里, 正倒向型随机微分方程的一般形式为

$$\begin{cases} dx_t = b(t, x_t, y_t, z_t)dt + \sigma(t, x_t, y_t, z_t)dW_t, \\ -dy_t = f(t, x_t, y_t, z_t)dt - z_t dW_t, & 0 \leq t \leq T, \\ x_0 = \epsilon, \quad y_T = \xi, \end{cases} \quad (1-44)$$

其中,  $W_t$  是一个  $r$  维布朗变量;  $\epsilon \in \mathcal{F}_0$ ;  $\xi \in \mathcal{F}_T$ ;  $b: \Omega \times [0, T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{m \times r} \rightarrow \mathbb{R}^d$ ;  $\sigma: \Omega \times [0, T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{m \times r} \rightarrow \mathbb{R}^{d \times r}$ ;  $f: \Omega \times [0, T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{m \times r} \rightarrow \mathbb{R}^m$ ;  $x_t \in \mathbb{R}^d$ ;  $y_t \in \mathbb{R}^m$  和  $z_t \in \mathbb{R}^{m \times r}$  为待求变量。依据广义 Feynman-Kac 公式 [66, 71], 方程 (1-44) 的解  $(y_t, z_t)$  满足如下关系

$$y_t = u(t, x_t), \quad z_t = (\nabla_x u \sigma)(t, x_t), \quad (1-45)$$

这里  $u(t, x)$  是如下偏微分方程的经典解:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{i=1}^d b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d [\sigma \sigma^*]_{ij} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + f(t, x, u, \nabla_x u \sigma) = 0, \quad (1-46)$$

并服从边界条件

$$u(T, x) = \xi. \quad (1-47)$$

在 2007 年, Cheridito 和其他一些学者 [74] 在正倒向型随机微分方程的基础上, 首先提出了二阶正倒向型随机微分方程的概念 [74–76]。在完备的概率空间  $(\Omega, \mathcal{F}, P, \{\mathcal{F}_t\}_{0 \leq t \leq T})$  里, 耦合的二阶正倒向型随机微分方程的一般形式为

$$\begin{cases} dx_t = b(t, \Theta_t)dt + \sigma(t, \Theta_t)dW_t, \\ -dy_t = f(t, \Theta_t)dt - z_t dW_t, \\ dz_t = A_t dt + \Gamma_t dW_t, \quad 0 \leq t \leq T, \\ x_0 = \epsilon, \quad y_T = \xi, \end{cases} \quad (1-48)$$

这里,  $\Theta_t = (x_t, y_t, z_t, A_t, \Gamma_t) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \times \mathcal{S}^d$  为待求变量;  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  是一个给定的概率空间;  $W_t$  是一个  $d$  维的布朗变量;  $\mathcal{S}^d$  代表  $d \times d$  实矩阵集;  $b: \Omega \times [0, T] \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \times \mathcal{S}^d \rightarrow \mathbb{R}^m$ ;  $\sigma: \Omega \times [0, T] \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \times \mathcal{S}^d \rightarrow \mathbb{R}^{m \times d}$ ;  $f: \Omega \times [0, T] \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \times \mathcal{S}^d \rightarrow \mathbb{R}$ 。在某些假定前提下 [74, 75], 方程组 (1-48) 的解  $(y_t, z_t, A_t, \Gamma_t)$  满足关系

$$\begin{cases} y_t = u(t, x_t), \quad z_t = (\nabla_x u \sigma)(t, x_t), \\ \Gamma_t = (\nabla_x (\nabla_x u \sigma) \sigma)(t, x_t), \quad A_t = \left( \tilde{\mathcal{L}}(\nabla_x u \sigma) \right)(t, x_t), \end{cases} \quad (1-49)$$

这里,  $\tilde{\mathcal{L}}$  为一个二阶椭圆微分算子

$$\tilde{\mathcal{L}}\phi = \frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla_x \phi(t, x)b(t, x) + \frac{1}{2} \text{tr}(\sigma(t, x)\sigma^*(t, x)\nabla_x^2 \phi), \quad (1-50)$$

$\nabla_x^2 \phi$  为一个 Hessian 矩阵 [77], 即  $\nabla_x^2 \phi = (\partial_{x_1}^2 \phi, \dots, \partial_{x_m}^2 \phi)$ 。

过去二十余年里, 学者们提出了许多数值方法来求解上述倒向型/正倒向型/二阶正倒向型随机微分方程 [78–89], 如: 四步法 [90], 随机时间算法 [91], 时空离散算法 [92], 线性近似算法 [93] 等。在 2006 年, 赵卫东等人 [94] 针对倒向型随机微分方程提出一种  $\theta$  格式的数值方法, 并成功证明: 当  $\theta \neq \frac{1}{2}$  时, 该格式具有一阶收敛精度; 当  $\theta = \frac{1}{2}$  时, 该格式具有二阶收敛精度。然而据作者所知, 目前大多数数值格式只能求解低维的倒向型随机微分方程, 较少的数值方法可以求解正倒向型/二阶正倒向型随机微分方程, 只有极少的数值方法可以求解高维的 (大于三维) 正倒向型随机微分方程 [86, 95, 96]! 因为数值方法很难回避所谓的“维数灾难”。

本文应用同伦分析方法，成功求解了三种不同类型的倒向型随机微分方程和三种不同类型的正倒向型随机微分方程（包含一个 12 维的算例）。而且在 6 维情况下，若要求获得同样精度的解，同伦分析方法的计算效率比数值方法高 3000 余倍。这些均揭示了应用同伦分析方法求解倒向型/正倒向型随机微分方程的巨大潜力。此外，在这 6 个算例中，作者使用了相同的线性算子  $\mathcal{L}[u] = \frac{\partial u}{\partial t}$ ，并都得到了收敛的结果，这说明在偏微分方程 (1-46) 中，时间变量  $t$  应占主导地位。

## 第二章 应用同伦分析方法求解任意水深中的极限斯托克斯波

### 2.1 极限斯托克斯波的数学描述

本文考虑二维、无粘性、无旋和不可压缩的周期性重力波，重力是唯一作用的外力，且忽略表面张力和空气流动引起的压力变化，水域带有水平底部。在惯性坐标系下，重力波从右向左以定常波速  $c$  移动。让参考坐标系随着波峰一起移动，则二维周期性重力波在参考坐标系下为稳态。

如图2-1 (a) 所示， $\lambda$ 、 $H$  和  $g$  分别表示波长、波高和重力加速度。把  $x$  轴固定在水平底部上方  $d$  处，并令自由水面处的流函数  $\Psi = 0$ ，水平底部的流函数  $\Psi = -c d$ 。则根据自由面处的伯努利条件，有

$$v\bar{v} + 2gy = K, \quad \Psi = 0, \quad (2-1)$$

这里：速度  $v = v_x - iv_y$ ， $\bar{v}$  表示  $v$  的共轭复数， $K$  为未知常数。

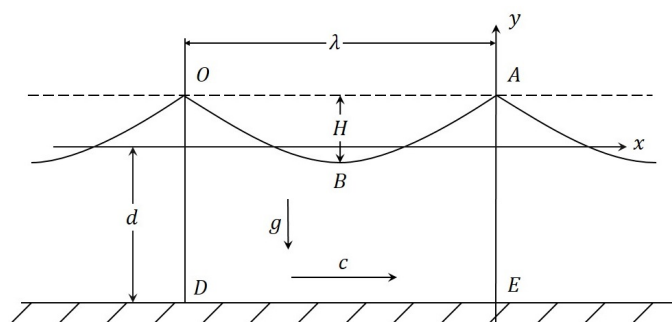
引入变换

$$x + iy = z(x, y) = z(\zeta) = i \left[ \ln \zeta + \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{a_j}{j} \left( \zeta^j - \frac{r_0^{2j}}{\zeta^j} \right) \right], \quad (2-2)$$

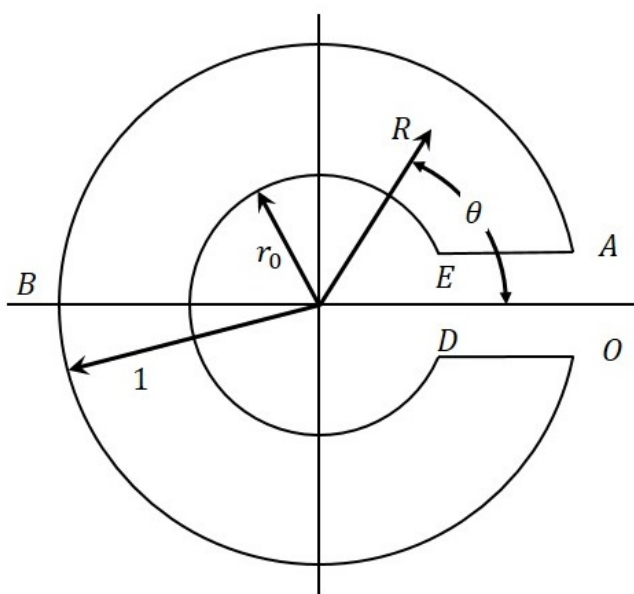
这里， $\zeta = Re^{i\theta}$ ； $R$ 、 $r_0$  和  $\theta$  分别代表半径，内半径和幅角； $a_1, a_2, \dots, a_j, \dots$  为待求常系数。则物理平面“ $z$ ”上的波浪运动区域“ABODEA”可映射至“ $\zeta$ ”平面上的环形区域“ABODEA”，如图2-1所示；水平底部  $\Psi = -c d$  和自由水面  $\Psi = 0$  分别映射至圆周  $R = r_0 = e^{-d}$  和  $R = 1$  上。显然， $r_0 = 0$  和  $r_0 \rightarrow 1$  分别对应无限水深和极浅水深工况。复速度势  $w$  可表示为

$$w = \Phi + i\Psi = i c \ln \zeta = c \theta + i c \ln R, \quad (2-3)$$

这里  $\Phi$  表示速度势。



(a)  $z$  平面



(b)  $\zeta$  平面

图 2-1 保角映射

Fig. 2-1 Conformal transformation

根据公式 (2-2), 有

$$\begin{cases} -x = \theta + \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{a_j}{j} \left( R^j + \frac{r_0^{2j}}{R^j} \right) \sin(j\theta), \\ y = \ln R + \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{a_j}{j} \left( R^j - \frac{r_0^{2j}}{R^j} \right) \cos(j\theta). \end{cases} \quad (2-4)$$



则波长

$$\lambda = x \Big|_{R=1, \theta=0} - x \Big|_{R=1, \theta=2\pi} = 2\pi, \quad (2-5)$$

波陡

$$\frac{H}{\lambda} = \frac{1}{2\pi} \left( y \Big|_{R=1, \theta=0} - y \Big|_{R=1, \theta=\pi} \right) = \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{a_j}{2j\pi} (1 - r_0^{2j}) [1 - \cos(j\pi)]. \quad (2-6)$$

根据公式 (2-3), 复速度

$$v = \frac{dw}{dz} = \frac{dw}{d\zeta} \frac{d\zeta}{dz} = \frac{c}{f(\zeta)}, \quad (2-7)$$

这里,

$$f(\zeta) = 1 + \sum_{j=1}^{+\infty} a_j \left( \zeta^j + \frac{r_0^{2j}}{\zeta^j} \right). \quad (2-8)$$

注意到波峰处的速度为 0, 因而公式 (2-1) 可化为

$$v\bar{v} + 2g \int_0^\theta \operatorname{Im} \left[ \frac{dz}{d\zeta} \frac{d\zeta}{d\theta} \right] d\theta = 0, \quad \text{当 } \Psi = 0. \quad (2-9)$$

把 (2-2), (2-7), (2-8) 代入到 (2-9) 中, 我们可以得到如下非线性代数方程

$$\frac{2g}{c^2} f \bar{f} \int_0^\theta \operatorname{Im}[f] d\theta - 1 = 0, \quad R = 1. \quad (2-10)$$

理论上要精确求解方程 (2-10), 傅里叶系数  $a_1, a_2, \dots, a_j, \dots$  需要全部保留, 然而实际上我们仅能考虑有限项。因此我们保留前  $r$  个傅里叶系数  $a_1, a_2, \dots, a_r$ , 即

$$f(\zeta) \approx a_0 + \sum_{j=1}^r a_j \left( \zeta^j + \frac{r_0^{2j}}{\zeta^j} \right), \quad a_0 = 1. \quad (2-11)$$

把 (2-11) 代入到 (2-10), 并让方程左右两边  $\cos(k\theta)$  ( $k = 0, 1, 2, \dots, r$ ) 前的系数相等, 我们可以得到如下  $(r+1)$  个代数方程<sup>1</sup>:

$$c^2 = g \left( 2j_0 h_0 + \sum_{n=1}^r j_n h_n \right), \quad (2-12)$$

<sup>1</sup>详细推导请见附录 A。

和

$$\begin{aligned} & \mathcal{N}_k[a_1, a_2, \dots, a_r] \\ &= j_0 h_k + j_k h_0 + \frac{1}{2} \left( \sum_{n=1}^{k-1} j_n h_{k-n} + \sum_{n=1}^{r-k} j_n h_{n+k} + \sum_{n=1}^r j_{n+k} h_n \right) = 0, \end{aligned} \quad (2-13)$$

这里  $\mathcal{N}_k$  ( $k = 1, 2, \dots, r$ ) 为非线性算子, 且

$$\left\{ \begin{aligned} h_0 &= \sum_{n_1=1}^r \frac{a_{n_1} (1 - r_0^{2n_1})}{n_1}, \\ h_n &= -\frac{a_n (1 - r_0^{2n})}{n} \quad \text{当 } 1 \leq n \leq r, \\ j_0 &= 1 + \sum_{n_1=1}^r a_{n_1}^2 (1 + r_0^{4n_1}), \\ j_n &= 2 \left[ \sum_{n_1=0}^{r-n} (1 + r_0^{2n+4n_1}) a_{n_1} a_{n_1+n} + \sum_{n_1=1}^{n-1} r_0^{2n-2n_1} a_{n_1} a_{n-n_1} \right] \\ &\quad \text{当 } 1 \leq n \leq r, \\ j_n &= 2 \sum_{n_1=n-r}^r r_0^{2n-2n_1} a_{n_1} a_{n-n_1} \quad \text{当 } r < n \leq 2r. \end{aligned} \right. \quad (2-14)$$

求解极限斯托克斯波问题也因此转化为求解方程 (2-12) 和 (2-13) 中的  $(r+1)$  个未知常数  $c, a_1, a_2, \dots, a_r$ 。

## 2.2 同伦分析方法求解步骤

令  $a_{j,0}$  为  $a_j$  ( $j = 1, 2, \dots, r$ ) 的初始猜测解,  $c_0$  为非零的辅助参数 (称之为收敛控制参数), 嵌入变量  $q \in [0, 1]$ 。我们构造如下方程组

$$(1-q) [\Omega_k(q) - a_{k,0}] = c_0 q \mathcal{N}_k [\Omega_1(q), \Omega_2(q), \dots, \Omega_r(q)], \quad k = 1, 2, \dots, r, \quad (2-15)$$

这里, 非线性算子  $\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2, \dots, \mathcal{N}_r$  由 (2-13) 定义, 未知函数  $\Omega_1(q), \Omega_2(q), \dots, \Omega_r(q)$  分别对应于待求傅里叶系数  $a_1, a_2, \dots, a_r$ 。

当  $q = 0$  时, 显然方程 (2-15) 有如下唯一解

$$\Omega_k(0) = a_{k,0}, \quad k = 1, 2, \dots, r. \quad (2-16)$$

当  $q = 1$  时, 若假定

$$\Omega_k(1) = a_k, \quad k = 1, 2, \dots, r. \quad (2-17)$$

则方程 (2-15) 可化为原方程 (2-13)。随着嵌入变量  $q$  从 0 逐渐增加至 1, 函数  $\Omega_j(q)$  从初始猜测  $a_{j,0}$  连续变化至待求系数  $a_j$  ( $j = 1, 2, \dots, r$ ), 因此我们称方程 (2-15) 为零阶形变方程。由 (2-16), 我们可得到如下麦克劳林级数

$$\Omega_n(q) = a_{n,0} + \sum_{k=1}^{+\infty} a_{n,k} q^k, \quad n = 1, 2, \dots, r, \quad (2-18)$$

这里:

$$a_{n,k} = \mathcal{D}_k[\Omega_n(q)], \quad n = 1, 2, \dots, r, \quad (2-19)$$

我们称

$$\mathcal{D}_k[f] = \frac{1}{k!} \left. \frac{\partial^k f}{\partial q^k} \right|_{q=0} \quad (2-20)$$

为对  $f$  的  $k$  阶同伦求导。假定我们恰当地选取收敛控制参数  $c_0$ , 使得麦克劳林级数 (2-18) 在  $q = 1$  处收敛, 则根据 (2-17), 我们可得到所谓的同伦级数解

$$a_n = \sum_{k=0}^{+\infty} a_{n,k}, \quad n = 1, 2, \dots, r. \quad (2-21)$$

将 (2-18) 代入到零阶形变方程 (2-15) 中, 并让方程左右两边与  $q$  有关的各项指数幂均相等, 可得到如下  $m$  阶同伦形变方程

$$a_{k,m} - \chi_m a_{k,m-1} = c_0 \mathcal{D}_{m-1}[\mathcal{N}_k], \quad k = 1, 2, \dots, r, \quad (2-22)$$

这里：

$$\begin{aligned}
& \mathcal{D}_i[\mathcal{N}_k] \\
= & \sum_{n_2=0}^i \left\{ - \left[ \frac{a_{k,i-n_2} (1 - r_0^{2k})}{k} \right] \right. \\
& \times \left[ 1 - \chi_{n_2+1} + \sum_{n_1=1}^r \sum_{n_3=0}^{n_2} (1 + r_0^{4n_1}) a_{n_1,n_3} a_{n_1,n_2-n_3} \right] \\
& + 2 \left[ \sum_{n_1=1}^r \frac{a_{n_1,i-n_2} (1 - r_0^{2n_1})}{n_1} \right] \left[ \sum_{n_1=1}^{k-1} \sum_{n_3=0}^{n_2} r_0^{2k-2n_1} a_{n_1,n_3} a_{k-n_1,n_2-n_3} \right. \\
& \left. + \sum_{n_1=0}^{r-k} \sum_{n_3=0}^{n_2} (1 + r_0^{2k+4n_1}) a_{n_1,n_3} a_{n_1+k,n_2-n_3} \right] \\
& - \sum_{n=1}^{k-1} \left[ \frac{a_{k-n,i-n_2} (1 - r_0^{2k-2n})}{k-n} \right] \left[ \sum_{n_1=1}^{n-1} \sum_{n_3=0}^{n_2} r_0^{2n-2n_1} a_{n_1,n_3} a_{n-n_1,n_2-n_3} \right. \\
& \left. + \sum_{n_1=0}^{r-n} \sum_{n_3=0}^{n_2} (1 + r_0^{2n+4n_1}) a_{n_1,n_3} a_{n_1+n,n_2-n_3} \right] \\
& - \sum_{n=1}^{r-k} \left[ \frac{a_{k+n,i-n_2} (1 - r_0^{2k+2n})}{k+n} \right] \left[ \sum_{n_1=1}^{n-1} \sum_{n_3=0}^{n_2} r_0^{2n-2n_1} a_{n_1,n_3} a_{n-n_1,n_2-n_3} \right. \\
& \left. + \sum_{n_1=0}^{r-n} \sum_{n_3=0}^{n_2} (1 + r_0^{2n+4n_1}) a_{n_1,n_3} a_{n_1+n,n_2-n_3} \right] \\
& - \sum_{n=1}^{r-k} \left[ \frac{a_{n,i-n_2} (1 - r_0^{2n})}{n} \right] \left[ \sum_{n_1=1}^{n+k-1} \sum_{n_3=0}^{n_2} r_0^{2n+2k-2n_1} a_{n_1,n_3} a_{n+k-n_1,n_2-n_3} \right. \\
& \left. + \sum_{n_1=0}^{r-n-k} \sum_{n_3=0}^{n_2} (1 + r_0^{2n+2k+4n_1}) a_{n_1,n_3} a_{n_1+n+k,n_2-n_3} \right] \\
& - \sum_{n=r-k+1}^r \left[ \frac{a_{n,i-n_2} (1 - r_0^{2n})}{n} \right] \\
& \left. \times \left[ \sum_{n_1=n+k-r}^r \sum_{n_3=0}^{n_2} r_0^{2n+2k-2n_1} a_{n_1,n_3} a_{n+k-n_1,n_2-n_3} \right] \right\}, \tag{2-23}
\end{aligned}$$

其中：

$$a_{0,0} = 1, \quad a_{0,k} = 0 \quad \text{当 } k \geq 1,$$

且:

$$\chi_k = \begin{cases} 0 & \text{当 } k \leq 1, \\ 1 & \text{当 } k > 1. \end{cases} \quad (2-24)$$

注意到在同伦分析方法的框架中, 我们有极大的自由选取初始猜测解  $a_{1,0}$ ,  $a_{2,0}$ ,  $\dots$ ,  $a_{r,0}$ 。为简单起见, 我们选取

$$a_{k,0} = \frac{1}{k}, \quad k = 1, 2, \dots, r. \quad (2-25)$$

一旦我们求得  $a_{1,k}$ ,  $a_{2,k}$ ,  $\dots$ ,  $a_{r,k}$ , 则根据高阶形变方程 (2-23), 可依次求出待求系数  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $\dots$ ,  $a_r$  的  $n$  阶同伦级数解

$$\tilde{\Omega}_{i,n} = \sum_{k=0}^n a_{i,k}, \quad i = 1, 2, \dots, r. \quad (2-26)$$

当求出  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $\dots$ ,  $a_r$ , 将其代入到方程 (2-12) 中, 波速  $c$  即可得到。

我们定义平方剩余误差

$$\mathcal{E} = \sum_{i=1}^r \left( \mathcal{N}_i \left[ \tilde{\Omega}_1, \tilde{\Omega}_2, \dots, \tilde{\Omega}_r \right] \right)^2, \quad (2-27)$$

这里非线性算子  $\mathcal{N}_1$ ,  $\mathcal{N}_2$ ,  $\dots$ ,  $\mathcal{N}_r$  按 (2-13) 定义。显然, 当误差  $\mathcal{E}$  越小, 求得的同伦级数解 (2-26) 越精确。而且廖世俊 [30, 31] 已严格证明: 若误差  $\mathcal{E}$  趋近于 0, 则同伦级数解必定收敛至原方程的一个解。因而, 我们仅需考虑剩余误差 (2-27) 即可。

## 2.3 无限水深中的结果

根据 [30], 使用迭代技巧可有效加速同伦级数解的收敛速度。 $n$  阶同伦迭代的具体步骤为: 把  $n$  阶同伦近似解  $\tilde{\Omega}_{1,n}$ ,  $\tilde{\Omega}_{2,n}$ ,  $\dots$ ,  $\tilde{\Omega}_{r,n}$  取代下一次迭代的初始猜测解  $a_{1,0}$ ,  $a_{2,0}$ ,  $\dots$ ,  $a_{r,0}$ , 即:  $a_{1,0} = \tilde{\Omega}_{1,n}$ ,  $a_{2,0} = \tilde{\Omega}_{2,n}$ ,  $\dots$ ,  $a_{r,0} = \tilde{\Omega}_{r,n}$ , 并进行计算。

图 2-2<sup>2</sup> 给出了迭代技巧对同伦分析方法收敛速度的影响。我们发现虽然无论是否使用迭代技巧, 同伦分析方法均能给出收敛的结果, 但是同伦迭代方法的计算效率远高于非迭代的同伦分析方法, 而且一阶同伦迭代方法的计算效率最高。因此本章我们均采取一阶同伦迭代方法。

<sup>2</sup>采用 C 语言, 计算机拥有 8 个 CPU, i7 3.60GHz 处理器, 8GB 内存。

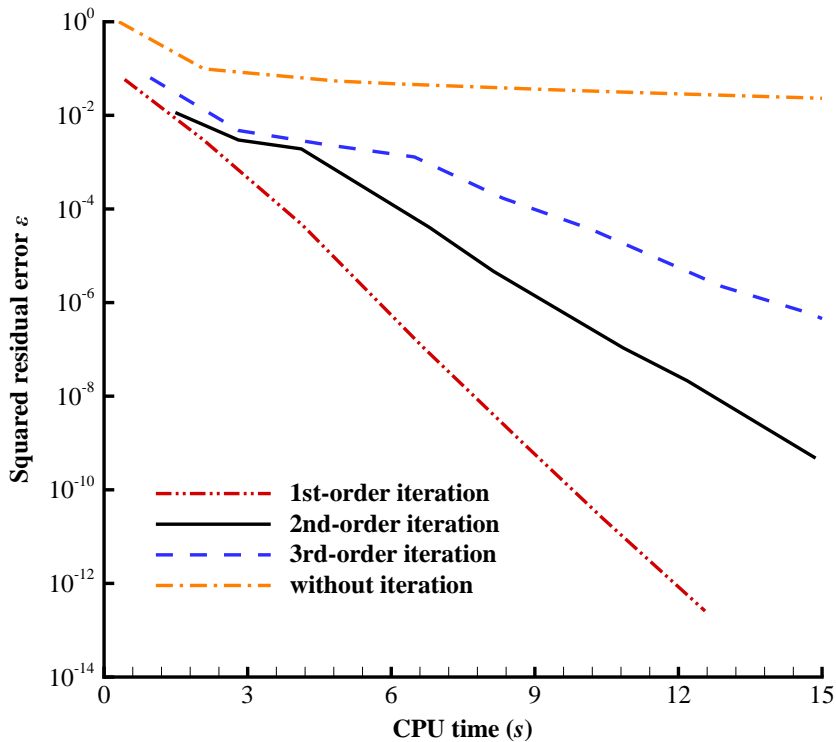


图 2-2 极限斯托克斯波, 当  $r_0 = 0$ ,  $r = 100$ ,  $c_0 = -0.2$  时, 误差与计算时间的关系曲线图

Fig. 2-2 The squared residual error,  $\mathcal{E}$ , versus used CPU times in the case of  $r_0 = 0$ ,  $r = 100$  and  $c_0 = -0.2$ .

表 2-1 给出了采用一阶同伦迭代方法, 在无限水深,  $c_0 = -0.2$ ,  $r = 100$ , 使用初始猜测解 (2-25) 的工况下的计算结果。可以发现平方剩余误差  $\mathcal{E}$ (2-27) 会迅速降至  $10^{-17}$  量级, 这说明: 同伦分析方法能确保所有的傅里叶系数  $a_1$ ,  $a_2, \dots, a_r$  之同伦级数解均收敛! 图 2-3 给出了收敛控制参数  $c_0$  对同伦级数解  $a_1$  的影响。我们发现  $c_0 = -0.4$  会导致结果发散, 虽然  $c_0 = -0.2$  和  $c_0 = -0.1$  均能给出收敛的结果, 但  $c_0 = -0.2$  显然收敛更快。这说明通过调节收敛控制参数  $c_0$ , 可有效控制结果的收敛性和收敛速度,  $|c_0|$  越小, 级数解收敛越慢。表 2-2 给出了截断项数  $r$  对结果的影响。我们发现, 对于深水中的极限斯托克斯波, 要获得精确的结果, 项数  $r$  必须取得足够大 ( $r > 5000$ )。这

从数学上很容易理解，因为只有保留足够多的傅里叶系数，才能很好地拟合具有  $120^\circ$  尖角的波峰。极限斯托克斯波在无限水深中所对应的波陡之精确值为  $H/\lambda = 0.14108$ 。

表 2-1 无限水深， $c_0 = -0.2$ ， $r = 100$ ，使用初始猜测解 (2-25)，一阶同伦迭代方法在不同迭代次数所给出的计算结果。

Table 2-1 The squared residual error  $\mathcal{E}$ , wave steepness  $H/\lambda$  and wave speed parameter  $(g\lambda)/(2\pi c^2)$  versus iteration times in the case of  $r_0 = 0$ , given by the first-order HAM-based iteration approach using  $c_0 = -0.2$ ,  $r = 100$ , and the initial guess (2-25).

$m$ , iteration times	$\mathcal{E}$	$H/\lambda$	$(g\lambda)/(2\pi c^2)$
20	$1 \times 10^{-2}$	0.10623	1.0573
50	$3 \times 10^{-3}$	0.15083	0.8153
100	$5 \times 10^{-5}$	0.13846	0.8494
200	$3 \times 10^{-9}$	0.13974	0.8422
300	$3 \times 10^{-13}$	0.13973	0.8422
400	$1 \times 10^{-17}$	0.13973	0.8422

表 2-2 在无限水深， $c_0 = -0.2$  的工况条件下，一阶同伦迭代方法取不同项数  $r$  所给出的计算结果。

Table 2-2 Wave steepness  $H/\lambda$  and wave speed parameter  $(g\lambda)/(2\pi c^2)$  versus truncated terms  $r$  in the case of  $r_0 = 0$  (in infinite depth), given by the first-order HAM-based iteration approach using  $c_0 = -0.2$ .

$r$	$H/\lambda$	$(g\lambda)/(2\pi c^2)$
50	0.13926	0.8391
500	0.14085	0.8397
1000	0.14102	0.8388
2000	0.14107	0.8383
3000	0.14108	0.8382
4000	0.14109	0.8382
5000	0.14108	0.8381
6000	0.14108	0.8381

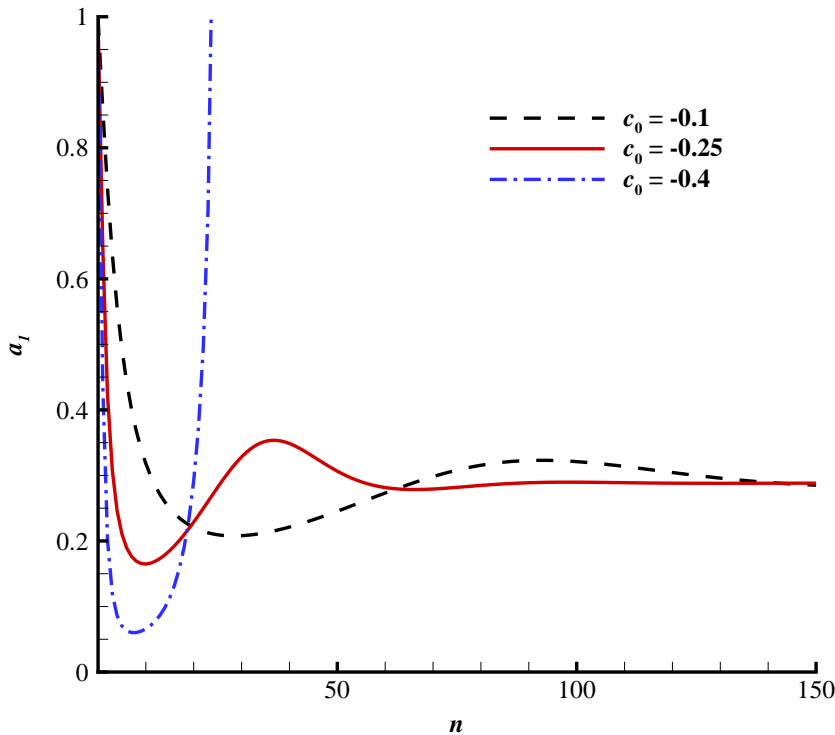


图 2-3 在无限水深,  $r = 100$  的工况条件下,  $a_1$  与迭代次数  $n$  的关系曲线图, ---,  $c_0 = -0.1$ ; —,  $c_0 = -0.25$ ; - · -,  $c_0 = -0.4$ 。

Fig. 2-3 The first Fourier coefficient,  $a_1$ , versus iteration times,  $n$ , in the case of  $r_0 = 0$ , given by the first-order HAM-based iteration approach using  $r = 100$  and the convergence-control parameter  $c_0 = -0.1, -0.25, -0.4$  respectively. ---,  $c_0 = -0.1$ ; —,  $c_0 = -0.25$ ; - · -,  $c_0 = -0.4$ .

图2-4比较了  $r = 5000$  和  $6000$  时的傅里叶系数值。发现这两种工况下的傅里叶系数值相吻合, 说明  $r > 5000$  已能给出精确的结果。而且从图2-4中可以发现高阶傅里叶系数  $a_j$  下降地非常缓慢, 这说明结果会收敛的很慢。因此为得到精确的结果, 我们不得不取足够大  $r$ 。图 2-5比较了同伦迭代方法和 Schwartz [6] 摄动方法所给出的波面图, 发现两者吻合很好。除此之外, 同伦迭代方法给出的波面在波峰处具有  $119.3^\circ$  夹角, 与理论值  $120^\circ$  一致。

值得强调得是, Schwartz 在其文 [6] 中曾明确指出: 帕德近似无法给出极限波浪的精确波面; 帕德近似仅仅只能确保前几项傅里叶系数  $a_j$  的精度。然



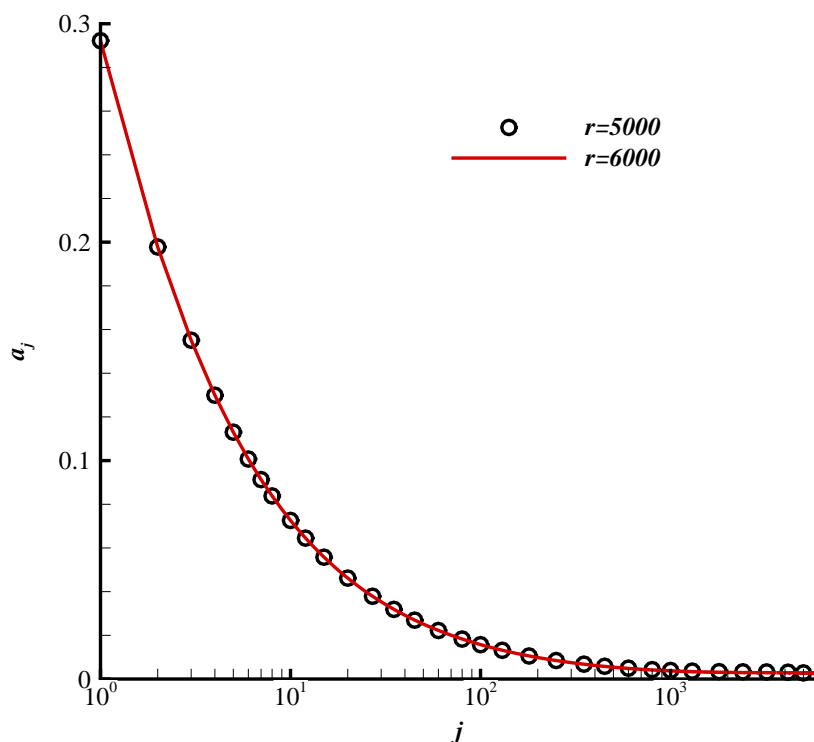


图 2-4 在无限水深,  $c_0 = -0.2$  的工况条件下, 由一阶同伦迭代方法给出的所有傅里叶系数  $a_j$ ,  $\circ$ ,  $r = 5000$ ; —,  $r = 6000$ 。

Fig. 2-4 Fourier coefficients  $a_j$  in the case of  $r_0 = 0$  (in infinite depth), given by the first-order HAM-based iteration approach using  $c_0 = -0.2$ .  $\circ$ ,  $r = 5000$ ; —,  $r = 6000$ .

而, 采用同伦迭代方法, 我们无需借助任何近似手段 (如帕德近似和外推技巧), 即可确保所有的傅里叶系数  $a_j$  均收敛。这强有力地证明了同伦分析方法优于摄动方法 [6]。

## 2.4 有限水深中的结果

不失一般性, 我们先考虑工况  $r_0 = 0.05$ 。注意到在同伦分析方法框架中, 我们有极大的自由选取初始猜测解, 而更优的初始猜测解往往对应于更快的收敛速度。考虑到随着水深变浅 ( $r_0$  从 0 增加至 1), 傅里叶系数  $a_1, a_2, \dots$ ,

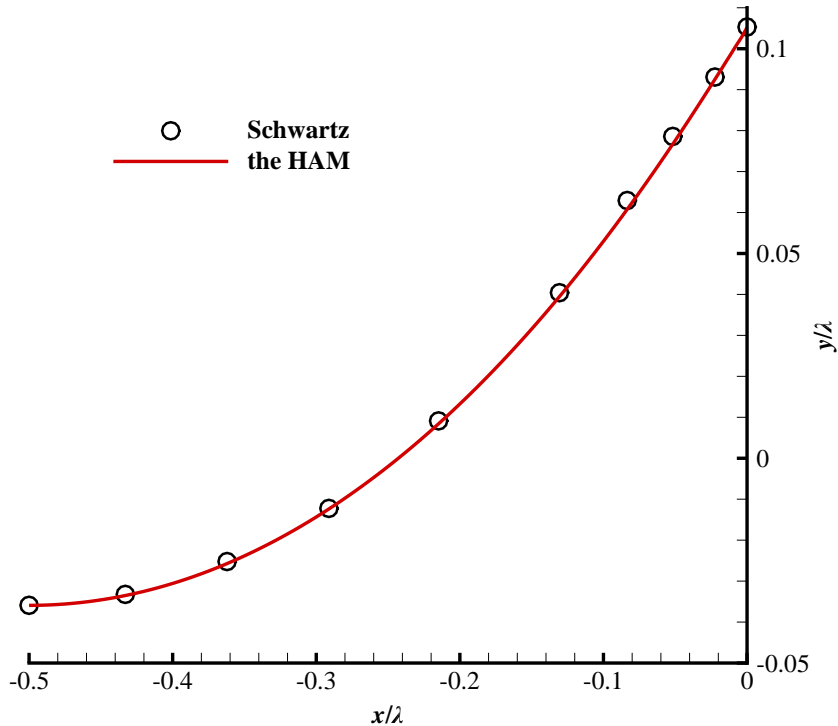


图 2-5 极限斯托克斯波在无限水深中的波面图，——，一阶同伦迭代方法；○，Schwartz [6] 摄动方法。

Fig. 2-5 Wave profiles in the case of  $r_0 = 0$ . ——, given by the first-order HAM-based iteration approach; ○, given by Schwartz's perturbation method with the aid of a so-called series completion method [6].

$a_r$  会连续变化， $r_0 = 0$  所对应的傅里叶系数  $a_1, a_2, \dots, a_{5000}$  显然比我们随意选取的一组值 (2-25) 更适合作为工况  $r_0 = 0.05$  的初始猜测解。换句话说，如果我们已经求出  $r_0 = 0$  时的傅里叶系数  $a_1, a_2, \dots, a_{5000}$ ；对于  $r_0 = 0.05$ ，我们应选取如下初始猜测解

$$a_{k,0} = \begin{cases} a_k & \text{当 } 1 \leq k \leq 5000, \\ a_{5000} & \text{当 } 5000 < k, \end{cases} \quad (2-28)$$

当  $r_0 = 0.05$ ，我们发现：若将 (2-25) 作为初始猜测解，则收敛控制参数

$c_0$  的收敛区间为  $[-0.2, 0)$ , 需要 400 次迭代 ( $c_0 = -0.2$ ) 才能得到收敛的结果, 如表 2-3 所示; 而若将 (2-28) 作为初始猜测解,  $c_0$  的收敛区间可增大至  $c_0 \in [-1.2, 0)$ , 迭代 30 次即可得到精确的结果, 如表 2-4 所示。这很好地解释了为什么我们应该采用 (2-28) 而不是 (2-25) 作为初始猜测解。

表 2-3  $r_0 = 0.05$ ,  $c_0 = -0.2$ ,  $r = 5500$ , 采用一阶同伦迭代方法并将 (2-25) 作为初始猜测解所得到的结果。

Table 2-3 Wave steepness  $H/\lambda$  and wave speed parameter  $(g\lambda)/(2\pi c^2)$  versus iteration times,  $m$ , in the case of  $r_0 = 0.05$ , given by the first-order HAM-based iteration approach using the convergence-control parameter  $c_0 = -0.2$ , the truncated terms  $r = 5500$  and the initial guess (2-25).

$m$ , iteration times	$H/\lambda$	$(g\lambda)/(2\pi c^2)$
10	0.18670	0.5663
50	0.13681	0.9099
100	0.13976	0.8455
200	0.14033	0.8416
300	0.14023	0.8421
400	0.14026	0.8421
500	0.14026	0.8421

表 2-4  $r_0 = 0.05$ ,  $c_0 = -1.2$ ,  $r = 5500$ , 采用一阶同伦迭代方法并将 (2-28) 作为初始猜测解所得到的结果。

Table 2-4 Wave steepness  $H/\lambda$  and wave speed parameter  $(g\lambda)/(2\pi c^2)$  versus iteration times,  $m$ , in the case of  $r_0 = 0.05$ , given by the first-order HAM-based iteration approach using the convergence-control parameter  $c_0 = -1.2$ , the truncated terms  $r = 5500$  and the initial guesses (2-28).

$m$ , iteration times	$H/\lambda$	$(g\lambda)/(2\pi c^2)$
10	0.14018	0.8423
20	0.14024	0.8422
30	0.14026	0.8421
40	0.14026	0.8421
50	0.14026	0.8421

类似地, 我们将  $r_0 = 0.05$  的结果作为  $r_0 = 0.1$  的初始猜测解, 然后将  $r_0 = 0.1$  的结果作为  $r_0 = 0.15$  的初始猜测解。按这种策略, 任意水深中的精确结果均可得到, 如表2-5所示。根据计算, 随着水深变浅, 收敛控制参数  $c_0$  的收敛域会随之变大。我们发现, 若利用  $r_0 = 0.05k$  的结果作为初始猜测解, 来计算水深  $r_0 \in (0.05k, 0.05(k+1)]$  的工况, 最优的  $c_0$  可由如下经验公式给出

$$c_0 = -1.2 - \frac{k^3}{2000}, \quad 0 \leq k \leq 19. \quad (2-29)$$

注意到, 当  $|c_0|$  越大, 相对应的收敛速度越快 (如图 2-3)。因此, 选取合适的  $c_0$  的确不但能确保同伦级数解收敛, 而且能提高收敛速度。根据计算, 对于任意水深, 我们无需借助任何的近似技巧 (如帕德近似和外推技巧), 迭代数百次后即可得到收敛的结果。这些均证实了同伦分析方法对于该问题的有效性。

表 2-6 给出了一阶同伦迭代方法在  $r_0 = 0.99$  时取不同  $r$  的结果。可以发现取  $r = 50000$  已能得到精确值。此外, 图2-6给出了在  $r_0 = 0.99$  工况条件下的所有傅里叶系数, 发现  $r = 40000$  与  $r = 50000$  的结果吻合很好。这些均说明, 即使对于极浅水深, 同伦分析方法依然能确保所有的傅里叶系数均收敛。

在 1880 年, Stokes [26] 曾猜测: 任意水深中的极限波浪的波峰夹角都为  $120^\circ$ 。这个猜想随后在 1982 年同时被 Amick et al. [97] 和 Plotnikov [98] 分别独立证明。然而据作者所知, 在极浅水深中的极限波浪之精确波面至今未曾有人给出。这是因为目前几乎所有的解析、数值方法均无法求出精确的高阶傅里叶系数, 而要描述尖峰波面, 精确的高阶傅里叶系数必不可少。因此, Cokelet [10] 摄动方法虽然对  $r_0 < 0.9$  均能够给出较为精确的  $H/d$  值, 但当  $r_0 > 0.5$  时, Cokelet [10] 摄动方法就无法给出波面图。所幸, 对于任意水深的极限波浪, 通过选取合适的收敛控制参数  $c_0$ , 同伦分析方法无需采用任何近似技巧即可确保所有的傅里叶系数均收敛, 因此也能直接给出精确的波面, 如图 2-7 所示。此外, 表2-7给出了不同水深中的极限斯托克斯波的波峰夹角, 我们的结果与理论值  $120^\circ$  相吻合。

$H/d \sim c^2/(gd)$  和  $H/d \sim \lambda/d$  的拟合公式分别为

$$\frac{H}{d} = 0.58557 \frac{c^2}{gd} + 0.62667 \left(\frac{c^2}{gd}\right)^2 - 0.73410 \left(\frac{c^2}{gd}\right)^3 + 0.19634 \left(\frac{c^2}{gd}\right)^4, \quad (2-30)$$

$$\frac{H}{d} = \frac{0.14109 \frac{\lambda}{d} + 0.00804 \left(\frac{\lambda}{d}\right)^2 + 0.00949 \left(\frac{\lambda}{d}\right)^3}{1 + 0.09671 \frac{\lambda}{d} + 0.02695 \left(\frac{\lambda}{d}\right)^2 + 0.01139 \left(\frac{\lambda}{d}\right)^3}, \quad (2-31)$$

拟合曲线如图2-8所示。

表 2-5 极限斯托克斯波在不同水深中的结果。

Table 2-5 Results for a variety of water depths, given by the first-order HAM-based iteration approach.

$r_0$	$r$	$d/\lambda$	$H/\lambda$	$H/d$	$(g\lambda)/(2\pi c^2)$
0	5000	$\infty$	$1.4108 \times 10^{-1}$	0	0.8381
0.05	5500	$4.77 \times 10^{-1}$	$1.4026 \times 10^{-1}$	0.2942	0.8421
0.10	6000	$3.66 \times 10^{-1}$	$1.3782 \times 10^{-1}$	0.3761	0.8540
0.15	6500	$3.02 \times 10^{-1}$	$1.3386 \times 10^{-1}$	0.4433	0.8739
0.20	7000	$2.56 \times 10^{-1}$	$1.2851 \times 10^{-1}$	0.5017	0.9022
0.25	7500	$2.21 \times 10^{-1}$	$1.2197 \times 10^{-1}$	0.5528	0.9395
0.30	8000	$1.92 \times 10^{-1}$	$1.1446 \times 10^{-1}$	0.5973	0.9864
0.35	8500	$1.67 \times 10^{-1}$	$1.0618 \times 10^{-1}$	0.6355	1.0442
0.40	9000	$1.46 \times 10^{-1}$	$9.7388 \times 10^{-2}$	0.6678	1.1145
0.45	9500	$1.27 \times 10^{-1}$	$8.8289 \times 10^{-2}$	0.6947	1.2001
0.50	10000	$1.10 \times 10^{-1}$	$7.9084 \times 10^{-2}$	0.7169	1.3048
0.55	10500	$9.51 \times 10^{-2}$	$6.9943 \times 10^{-2}$	0.7351	1.4344
0.60	11000	$8.13 \times 10^{-2}$	$6.0995 \times 10^{-2}$	0.7502	1.5977
0.65	11500	$6.86 \times 10^{-2}$	$5.2327 \times 10^{-2}$	0.7632	1.8091
0.70	12000	$5.68 \times 10^{-2}$	$4.3983 \times 10^{-2}$	0.7748	2.0922
0.75	14000	$4.58 \times 10^{-2}$	$3.5968 \times 10^{-2}$	0.7856	2.4898
0.80	16000	$3.55 \times 10^{-2}$	$2.8263 \times 10^{-2}$	0.7958	3.0876
0.85	18000	$2.59 \times 10^{-2}$	$2.0840 \times 10^{-2}$	0.8057	4.0856
0.90	22000	$1.68 \times 10^{-2}$	$1.3670 \times 10^{-2}$	0.8152	6.0838
0.95	28000	$8.16 \times 10^{-3}$	$6.7292 \times 10^{-3}$	0.8243	12.084
0.97	37000	$4.85 \times 10^{-3}$	$4.0128 \times 10^{-3}$	0.8278	20.087
0.99	50000	$1.60 \times 10^{-3}$	$1.3281 \times 10^{-3}$	0.8303	60.175

表 2-6  $r_0 = 0.99$ , 一阶同伦迭代方法取不同  $r$  时的结果。

Table 2-6 Wave steepness  $H/\lambda$  and wave speed parameter  $(g\lambda)/(2\pi c^2)$  versus truncated terms  $r$  in the case of  $r_0 = 0.99$ , given by the first-order HAM-based iteration approach.

$r$	$H/\lambda$	$(g\lambda)/(2\pi c^2)$
21000	$1.3229 \times 10^{-3}$	60.410
28000	$1.3251 \times 10^{-3}$	60.312
35000	$1.3264 \times 10^{-3}$	60.249
40000	$1.3272 \times 10^{-3}$	60.214
50000	$1.3281 \times 10^{-3}$	60.175
55000	$1.3281 \times 10^{-3}$	60.175

表 2-7 一阶同伦迭代方法在不同水深条件下所给出的波峰夹角。

Table 2-7 Included crest angles in a variety of depths, given by the first-order HAM-based iteration approach.

$r_0$	included crest angle
0	119.3°
0.3	119.2°
0.6	119.4°
0.9	120.2°
0.99	119.2°

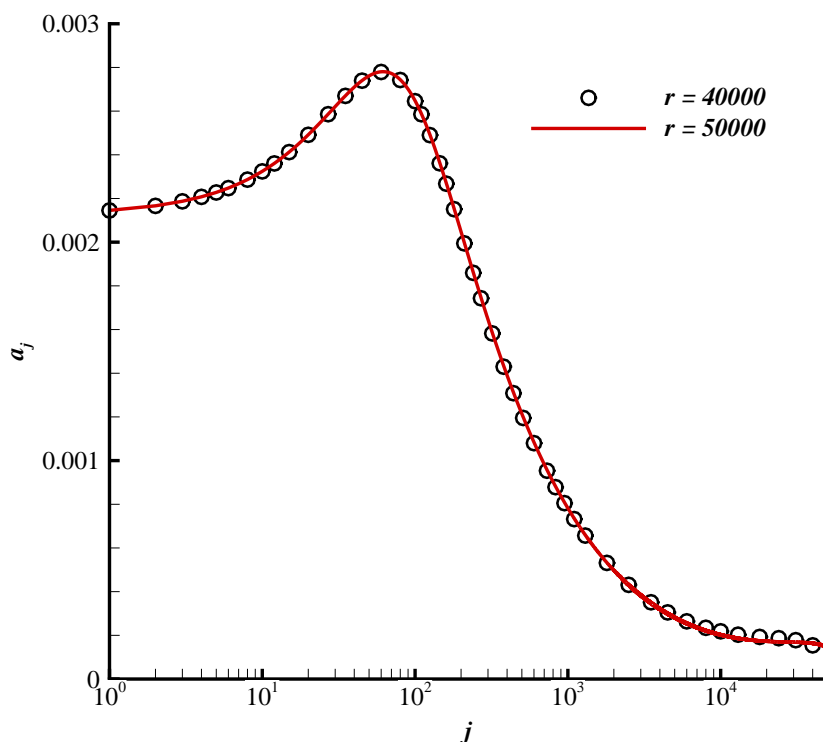


图 2-6  $r_0 = 0.99$  时，用一阶同伦迭代方法求出的所有傅里叶系数。○,  $r = 40000$ ; —,  $r = 50000$ 。

Fig. 2-6 Fourier coefficients  $a_j$  in the case of  $r_0 = 0.99$ , given by the first-order HAM-based iteration approach. ○,  $r = 40000$ ; —,  $r = 50000$ .

表 2-8 比较了不同方法所给出的极限斯托克斯波在不同水深中的  $H/\lambda$  值。可以发现 Schwartz [6] 方法仅对于  $r_0 < 0.7$  有效，而且结果偏大；Cokelet [10] 方法仅对  $r_0 \leq 0.8$  有效；Williams [13] 数值方法仅对  $r_0 \leq 0.9$  有效，而且结果精度很高；同伦分析方法对  $r_0 \leq 0.99$  均有效！

图2-9 比较了不同方法给出的  $H/\lambda \sim r_0$ 。可以发现，即使使用帕德近似和 Shanks 迭代  $e_1$  变换，Schwartz[6] 摄动方法也仅对  $r_0 \in [0, 0.7]$  有效；William [13] 数值方法仅对  $r_0 \in [0, 0.9]$  有效；然而同伦分析方法对  $r_0 \in [0, 0.99]$  均有效。图2-10比较了不同方法给出的  $H/d \sim c^2/(gd)$ 。不难发现，Cokelet [10] 摄动方法对于  $r_0 \geq 0.9$  失效，而同伦分析方法几乎对于任意水深均有效；除此之

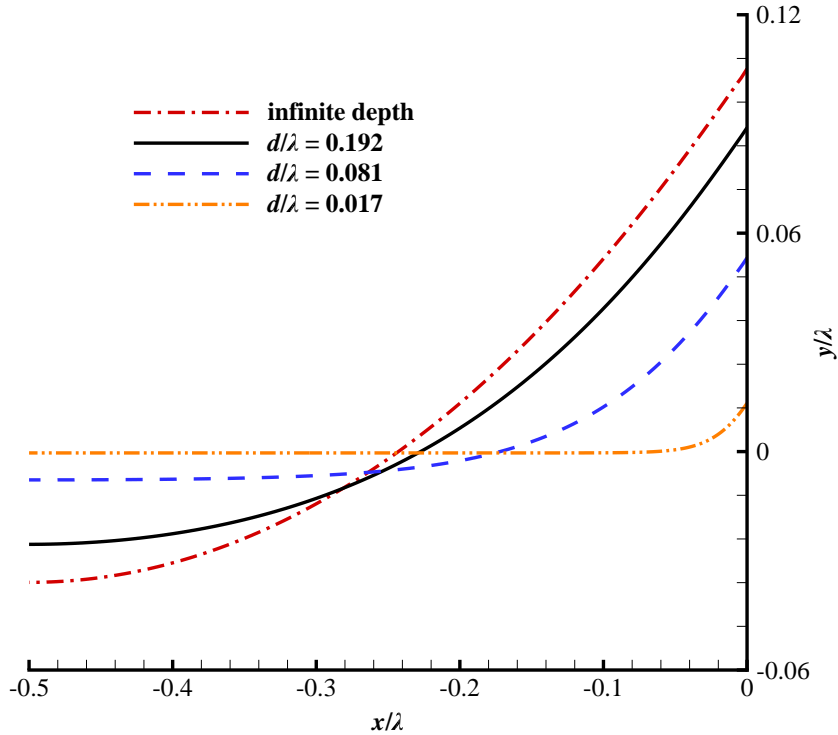


图 2-7 极限斯托克斯波在不同水深中的波面图。

Fig. 2-7 Wave profiles in a variety of water depths, given by the first-order HAM-based iteration approach.

外，对于  $r_0 = 0.99$ ，使用同伦分析方法获得的  $H/d$  与孤立波结果

$$\left(\frac{H}{d}\right)_{max} = \frac{c^2}{2gd} \quad \text{当 } r_0 = 1 \quad (2-32)$$

相吻合，这说明孤立波理论能被统一到斯托克斯波理论中。

根据 Hedges [99]，当 Ursell 数  $H\lambda^2/d^3 > 4000$  时，有限水深波浪即可视为孤立波。而当  $r_0 = 0.99$  时， $\lambda/d \approx 600$ ，Ursell 数  $H\lambda^2/d^3$  已大于  $3 \times 10^5$ 。这进一步证实了：有限水深（斯托克斯）波理论对于任意水深均有效，如图 2-11 所示。因此，在同伦分析方法框架中，无限水深/有限水深波理论，椭圆余弦波理论，孤立波理论均能统一到斯托克斯波理论中。而且，孤立波



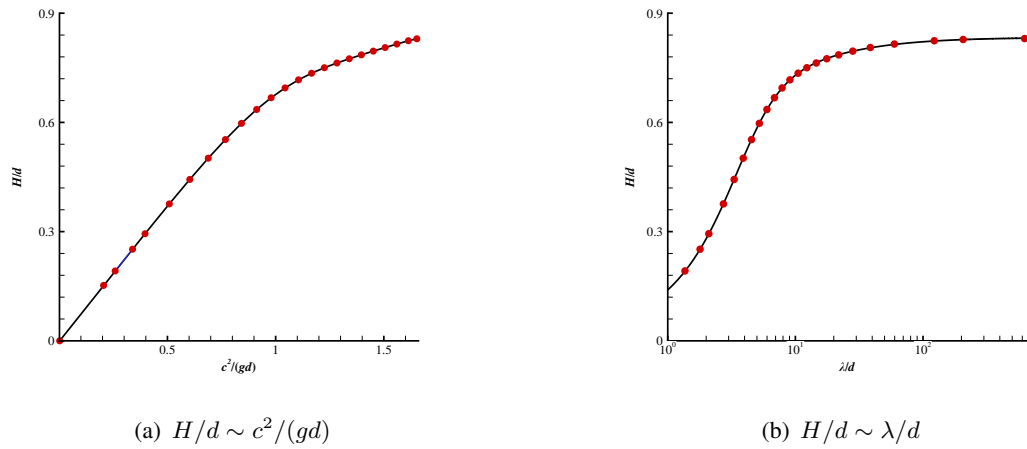


图 2-8  $H/d$  与  $c^2/(gd)$  和  $\lambda/d$  的拟合曲线。

Fig. 2-8 Comparison of  $H/d$  given by the HAM-based iteration approach and fitted formulas (2-30), (2-31). ●, the first-order HAM-based iteration approach; (a) —, (2-30); (b) —, (2-31).

表 2-8 极限斯托克斯波在不同水深中的  $H/\lambda$  值。

Table 2-8 Limiting wave steepness,  $H/\lambda$ , in a variety of depths.

$r_0$	Schwartz [6]	Cokelet [10]	Williams [13]	the HAM
0	$1.4118 \times 10^{-1}$	$1.41055 \times 10^{-1}$	$1.41063 \times 10^{-1}$	$1.4108 \times 10^{-1}$
0.1	$1.380 \times 10^{-1}$	$1.378 \times 10^{-1}$	$1.37801 \times 10^{-1}$	$1.3782 \times 10^{-1}$
0.2	$1.285 \times 10^{-1}$	$1.285 \times 10^{-1}$	$1.28495 \times 10^{-1}$	$1.2851 \times 10^{-1}$
0.3	$1.145 \times 10^{-1}$	$1.1443 \times 10^{-1}$	$1.14439 \times 10^{-1}$	$1.1446 \times 10^{-1}$
0.4	$9.75 \times 10^{-2}$	$9.739 \times 10^{-2}$	$9.7374 \times 10^{-2}$	$9.7388 \times 10^{-2}$
0.5	$7.91 \times 10^{-2}$	$7.910 \times 10^{-2}$	$7.9072 \times 10^{-2}$	$7.9084 \times 10^{-2}$
0.6	$6.14 \times 10^{-2}$	$6.090 \times 10^{-2}$	$6.0984 \times 10^{-2}$	$6.0995 \times 10^{-2}$
0.7	$4.5 \times 10^{-2}$	$4.374 \times 10^{-2}$	$4.3975 \times 10^{-2}$	$4.3983 \times 10^{-2}$
0.8	—	$2.79 \times 10^{-2}$	$2.8258 \times 10^{-2}$	$2.8263 \times 10^{-2}$
0.9	—	$1.5 \times 10^{-2}$	$1.3667 \times 10^{-2}$	$1.3670 \times 10^{-2}$
0.95	—	—	—	$6.7292 \times 10^{-3}$
0.97	—	—	—	$4.0128 \times 10^{-3}$
0.99	—	—	—	$1.3281 \times 10^{-3}$

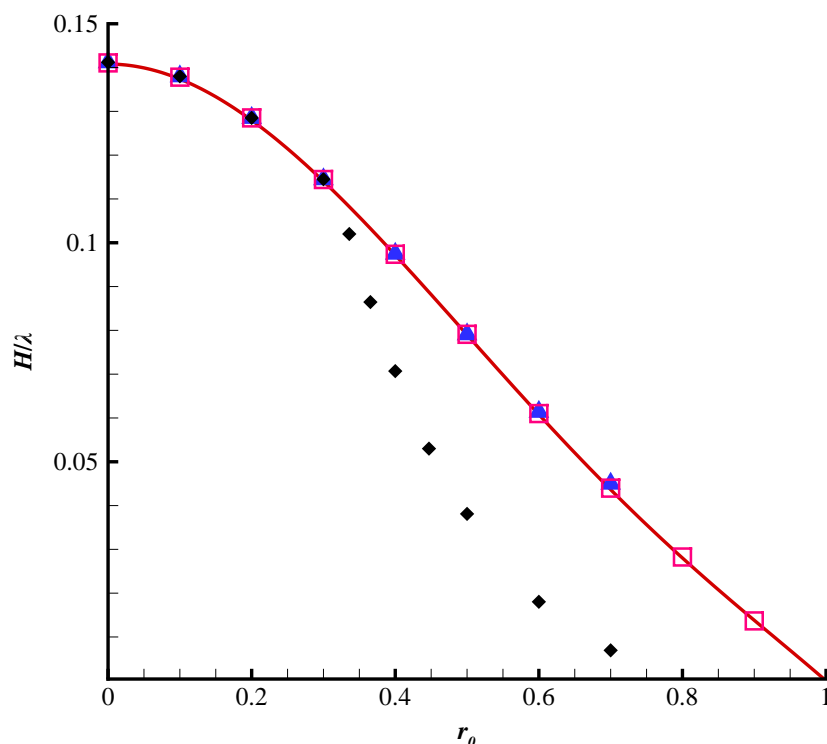


图 2-9 ——, 一阶同伦迭代方法;  $\blacklozenge$ , Schwartz [6] 摄动方法并使用帕德近似;  $\blacktriangle$ , Schwartz [6] 摄动方法并使用帕德近似和 Shanks 迭代  $e_1$  变换;  $\square$ , Williams [13] 数值方法。

Fig. 2-9 Comparison of the limiting wave steepness  $H/\lambda$ . ——, the first-order HAM-based iteration approach;  $\blacklozenge$ , perturbation method with the aid of Padé approximants [6];  $\blacktriangle$ , perturbation method with the aid of both Padé approximants and Shanks's iterated  $e_1$  transformation [6];  $\square$ : Williams's numerical method [13].

的极限波高一直是人们关心的一个话题, Yamada [3], Lenau [100], Yamada and Shiotani [4]和 Longuet-Higgins and Fenton [7]曾给出  $H/d = 0.827$ , 但 Witting [101], Witting and Bergin [102], Williams [13]和 Hunter and Vandebroek [15]却给出  $H/d = 0.8332$ 。本文支持  $H/d = 0.8332$  (因为当  $r_0 = 0.99$  时,  $H/d = 0.8303 > 0.827$ )。

图2-12 比较了当  $r_0 = 0.99$  时, 不同方法给出的波面。发现, 仅有同伦分析方法能给出  $119.2^\circ$  波峰尖角, 而 KdV 线性解, Laitone 二阶近似解 [103] 和

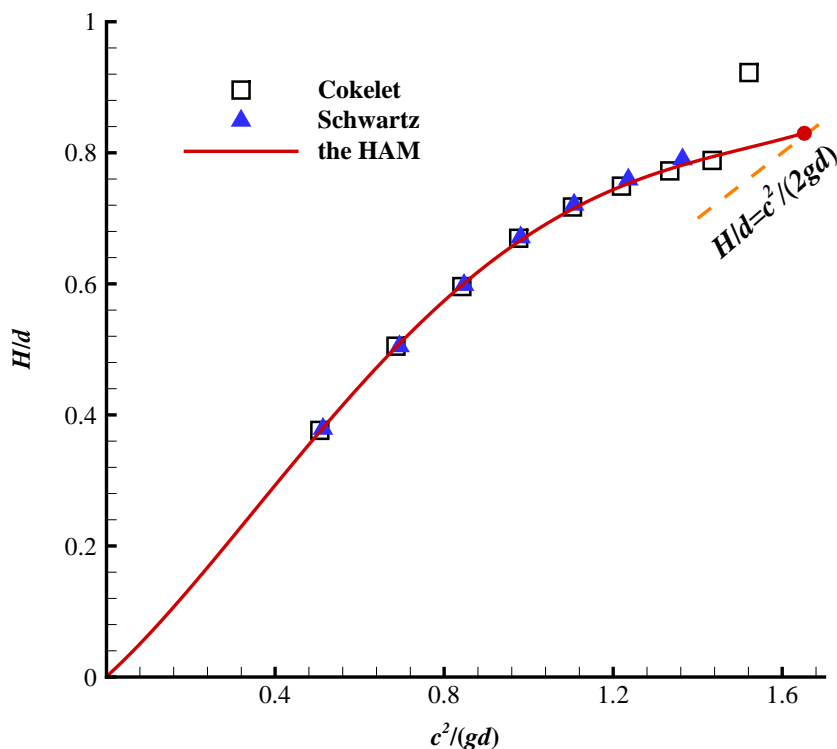


图 2-10  $H/d \sim c^2/(gd)$ 。——，一阶同伦迭代方法；●，一阶同伦迭代方法在  $r_0 = 0.99$  时的结果；▲，Schwartz [6]；□，Cokelet [10]；———， $H/d = c^2/(2gd)$ 。

Fig. 2-10 Comparison of  $H/d$ , versus the squared Froude number,  $c^2/(gd)$ . ——, the first-order HAM-based iteration approach; ●, the case of  $r_0 = 0.99$  given by the first-order HAM-based iteration approach; ▲, Schwartz [6]; □, Cokelet [10]; ———,  $H/d = c^2/(2gd)$ .

Fenton 九阶近似解 [104] 所给出的波面均含光滑波峰。这也说明，在极浅水深中，仅有同伦分析方法有效。而且相比于 KdV 线性解和 Laitone 二阶近似解 [103]，Fenton 九阶近似解 [104] 显然精度更高。

## 2.5 小结

求解任意水深的斯托克斯波是流体力学中的经典问题，学者们曾提出许多解析或数值方法，希望能够很好地解决该问题，然而结果却始终不尽人意。

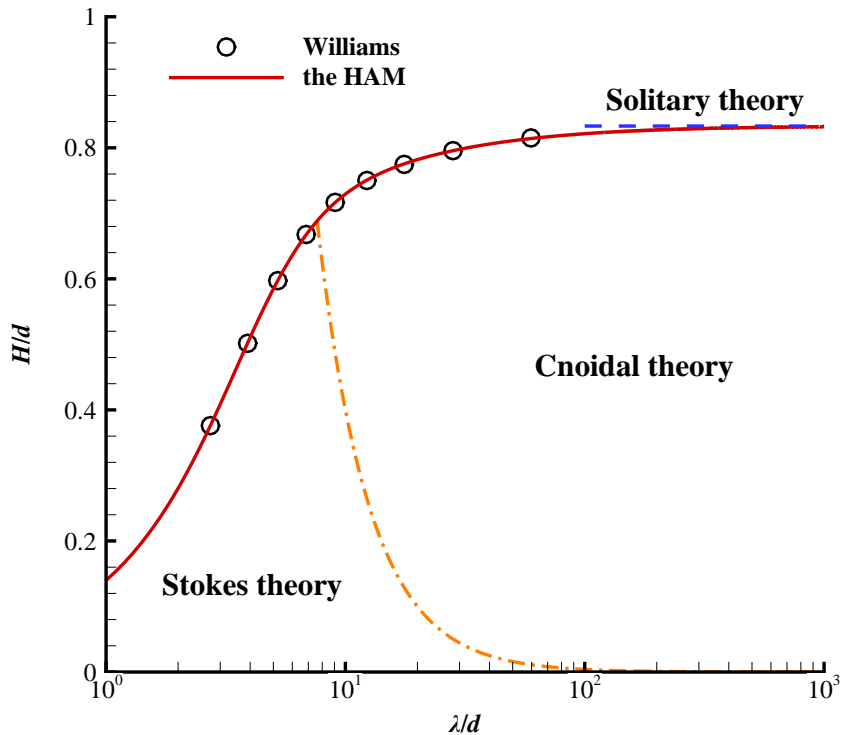


图 2-11  $H/d \sim \lambda/d$ 。○, Williams [13]; —, 一阶同伦迭代方法; - · -, 斯托克斯波理论和椭圆余弦波理论分界线, 即: Ursell 数  $H\lambda^2/d^3 = 40$  [99]; - - -, 孤立波:  $(H/d)_{max} = 0.83322$  [15]。

Fig. 2-11 Comparison of  $H/d$ , versus  $\lambda/d$ . ○, Williams [13]; —, the first-order HAM-based iteration approach; - · -, demarcation line between Stokes and cnoidal theories, the Ursell number  $H\lambda^2/d^3 = 40$  [99]; - - -,  $(H/d)_{max} = 0.83322$  for solitary wave [15].

目前来说, 求解该问题主要存在两个难点: (1) 当水深很浅或波高很高时 (甚至达到极限波高), 波浪方程的非线性非常强, 高阶傅里叶系数很难收敛; (2) 随着保留的傅里叶系数项数增加, 解析方法的计算效率会急剧下降。而本文采用同伦分析方法成功克服了这两个难点。通过调节收敛控制参数  $c_0$ , 我们无需借助任何近似技巧 (如帕德近似和外推技巧) 即可确保所有的傅里叶系数均收敛。此外, 通过引入迭代技巧并选取较优的初始猜测解, 对于任意水深, 迭代数百次即可得到收敛的结果, 这显示出同伦分析方法对于该问题的有效性和高

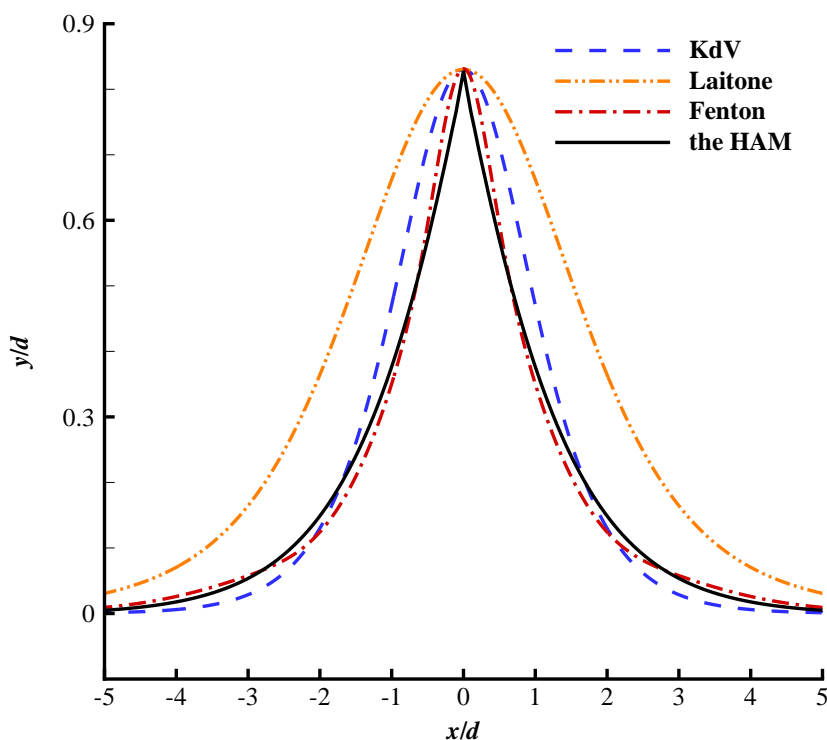


图 2-12 ---, KdV 解; - · - ·, Laitone 二阶近似解 [103]; - · · -, Fenton 九阶近似解 [104]; —, 同伦解 (2-10)。

Fig. 2-12 Wave profile in the case of  $r_0 = 0.99$ . ---, exact solution of KdV equation; - · - ·, Laitone's second order approximation solution [103]; - · · -, Fenton's ninth-order approximation solution [104]; —, homotopy approximation solution of equation (2-10).

效性。

应当强调的是，对于极限斯托克斯波问题，其他方法很难给出精确的结果（特别是波面），而且尤其是在不借助任何近似技巧的前提条件下。据作者所知，当前极浅水中的极限波浪之精确波面至今未曾有人给出。因此，这是首次成功得到极浅水中极限波浪的尖峰波面！这充分说明了同伦分析方法的有效性。

对于不同水深，目前人们普遍采取不同的理论模型：斯托克斯波理论应用于无限/中等水深；椭圆余弦波理论应用于浅水；孤立波理论（如 KdV 方程，

Boussinesq 方程) 则应用于极浅水。然而本文发现, 斯托克斯波理论对于任意水深均有效, 如图 2-11 所示。这充分说明有限水深波理论, 椭圆余弦波理论和孤立波理论可全部统一到有限水深 (斯托克斯) 波理论框架中。

## 第三章 应用同伦分析方法求解大挠度圆薄板方程

### 3.1 求解微分形式的大挠度圆薄板方程

微分形式的大挠度圆薄板方程为

$$\mathcal{N}_1[\varphi(y), S(y)] = y^2 \frac{d^2 \varphi(y)}{dy^2} - \varphi(y)S(y) - Qy^2 = 0, \quad (3-1)$$

$$\mathcal{N}_2[\varphi(y), S(y)] = y^2 \frac{d^2 S(y)}{dy^2} + \frac{1}{2} \varphi^2(y) = 0, \quad (3-2)$$

服从边界条件

$$\varphi(0) = S(0) = 0, \quad (3-3)$$

$$\varphi(1) = \frac{\lambda}{\lambda - 1} \cdot \frac{d\varphi(y)}{dy} \Big|_{y=1}, \quad S(1) = \frac{\mu}{\mu - 1} \cdot \frac{dS(y)}{dy} \Big|_{y=1}, \quad (3-4)$$

这里,

$$y = \frac{r^2}{R_a^2}, \quad W(y) = \sqrt{3(1 - \nu^2)} \frac{w(y)}{h}, \quad \varphi(y) = y \frac{dW(y)}{dy}, \quad (3-5)$$

$$S(y) = 3(1 - \nu^2) \frac{R_a^2 N_r}{Eh^3} y, \quad Q = \frac{3(1 - \nu^2) \sqrt{3(1 - \nu^2)} R_a^4}{4Eh^4} p, \quad (3-6)$$

其中,  $r$  表示到板中心的径向距离;  $w(y)$ 、 $N_r$ 、 $E$ 、 $\nu$ 、 $R_a$ 、 $h$  和  $p$  分别代表板的挠度, 板的径向薄膜张力, 杨氏模量, 泊松比, 板的半径, 板厚和外加均布载荷; 参数  $\lambda$  和  $\mu$  与边界条件有关。由公式 (3-5), 可得无量纲的中心挠度

$$W(y) = - \int_y^1 \frac{1}{\varepsilon} \varphi(\varepsilon) d\varepsilon. \quad (3-7)$$

本章考虑以下四种边界条件:

- (a) 固定夹紧:  $\lambda = 0, \mu = 2/(1 - \nu)$ ;
- (b) 可移夹紧:  $\lambda = 0, \mu = 0$ ;
- (c) 简单支承:  $\lambda = 2/(1 + \nu), \mu = 0$ ;
- (d) 简单铰链支承:  $\lambda = 2/(1 + \nu), \mu = 2/(1 - \nu)$ ;

### 3.1.1 同伦分析方法求解步骤

由于  $\varphi(y)$  和  $S(y)$  均能被幂函数表达 [51], 即

$$\varphi(y) = \sum_{m=1}^{+\infty} a_m \cdot y^m, \quad S(y) = \sum_{m=1}^{+\infty} b_m \cdot y^m, \quad (3-8)$$

这里  $a_m$  和  $b_m$  均为常系数, 我们选取幂函数作为基函数。令

$$W(0) = a, \quad (3-9)$$

则根据 (3-7), 有

$$\int_0^1 \frac{1}{\varepsilon} \varphi(\varepsilon) d\varepsilon = -a. \quad (3-10)$$

我们构造如下零阶形变方程

$$\begin{aligned} & (1-q)\mathcal{L}[\Phi(y; q) - \varphi_0(y)] \\ &= c_0 q H_1(y) \left[ y^2 \frac{\partial^2 \Phi(y; q)}{\partial y^2} - \Phi(y; q) \Xi(y; q) - \Theta(q) y^2 \right], \end{aligned} \quad (3-11)$$

$$\begin{aligned} & (1-q)\mathcal{L}[\Xi(y; q) - S_0(y)] \\ &= c_0 q H_2(y) \left[ y^2 \frac{\partial^2 \Xi(y; q)}{\partial y^2} + \frac{1}{2} \Phi^2(y; q) \right], \end{aligned} \quad (3-12)$$

服从边界条件

$$\Phi(0; q) = \Xi(0; q) = 0, \quad (3-13)$$

$$\Phi(1; q) = \frac{\lambda}{\lambda-1} \cdot \frac{\partial \Phi(y; q)}{\partial y} \Big|_{y=1}, \quad \Xi(1; q) = \frac{\mu}{\mu-1} \cdot \frac{\partial \Xi(y; q)}{\partial y} \Big|_{y=1}, \quad (3-14)$$

并满足限制条件

$$\int_0^1 \frac{1}{\varepsilon} \Phi(\varepsilon; q) d\varepsilon = -a. \quad (3-15)$$

这里,  $\Phi(y; q)$ 、 $\Xi(y; q)$  和  $\Theta(q)$  分别表示待求函数  $\varphi(y)$ 、 $S(y)$  和  $Q$ ;  $\varphi_0(y)$  和  $S_0(y)$  分别为  $\varphi(y)$  和  $S(y)$  的初始猜测解, 且满足条件 (3-3), (3-4) 和 (3-10);  $\mathcal{L}$  为线性算子, 并满足  $\mathcal{L}[0] = 0$ ;  $H_1(y)$  和  $H_2(y)$  为非零的辅助函数; 收敛控制参数  $c_0$  为一个非零常数;  $q \in [0, 1]$  表示嵌入变量。

当  $q = 0$  时, 方程 (3-11)-(3-15) 有解

$$\Phi(y; 0) = \varphi_0(y), \quad \Xi(y; 0) = S_0(y). \quad (3-16)$$



当  $q = 1$  时, 若假定

$$\Phi(y; 1) = \varphi(y), \quad \Xi(y; 1) = S(y), \quad \Theta(1) = Q. \quad (3-17)$$

则方程 (3-11)-(3-15) 等价于原始方程 (3-1)-(3-4) 和 (3-10)。

利用 (3-16),  $\Phi(y; q)$ 、 $\Xi(y; q)$  和  $\Theta(q)$  可展开成如下麦克劳林级数

$$\begin{aligned} \Phi(y; q) &= \varphi_0(y) + \sum_{m=1}^{+\infty} \varphi_m(y) q^m, \\ \Xi(y; q) &= S_0(y) + \sum_{m=1}^{+\infty} S_m(y) q^m, \\ \Theta(q) &= Q_0 + \sum_{m=1}^{+\infty} Q_m q^m. \end{aligned} \quad (3-18)$$

把展开式 (3-18) 代入到零阶形变方程 (3-11)-(3-15) 中, 并让方程左右两边  $q^m$  ( $m = 1, 2, \dots$ ) 前系数相等, 可得  $m$  阶形变方程

$$\mathcal{L}[\varphi_m(y) - \chi_m \varphi_{m-1}(y)] = c_0 H_1(y) \delta_{1,m-1}(y), \quad (3-19)$$

$$\mathcal{L}[S_m(y) - \chi_m S_{m-1}(y)] = c_0 H_2(y) \delta_{2,m-1}(y), \quad (3-20)$$

并服从边界条件

$$\varphi_m(0) = S_m(0) = 0, \quad (3-21)$$

$$\varphi_m(1) = \frac{\lambda}{\lambda-1} \cdot \frac{d\varphi_m(y)}{dy} \Big|_{y=1}, \quad S_m(1) = \frac{\mu}{\mu-1} \cdot \frac{dS_m(y)}{dy} \Big|_{y=1}, \quad (3-22)$$

和限制条件

$$\int_0^1 \frac{1}{\varepsilon} \cdot \varphi_m(\varepsilon) d\varepsilon = 0, \quad (3-23)$$

这里,

$$\chi_m = \begin{cases} 0 & \text{当 } m \leq 1, \\ 1 & \text{当 } m > 1, \end{cases} \quad (3-24)$$

$$\delta_{1,m-1}(y) = y^2 \frac{d^2 \varphi_{m-1}(y)}{dy^2} - \sum_{k=0}^{m-1} \varphi_k(y) S_{m-1-k}(y) - Q_{m-1} y^2, \quad (3-25)$$

$$\delta_{2,m-1}(y) = y^2 \frac{d^2 S_{m-1}(y)}{dy^2} + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{m-1} \varphi_k(y) \varphi_{m-1-k}(y). \quad (3-26)$$

根据解表达原则, 我们选取如下初始猜测解

$$\varphi_0(y) = \frac{-2a}{2\lambda + 1}[(\lambda + 1)y - y^2], \quad S_0(y) = (\mu + 1)y - y^2 \quad (3-27)$$

和辅助线性算子

$$\mathcal{L}[u(y)] = \frac{d^2u(y)}{dy^2}. \quad (3-28)$$

根据系数遍历原则, 我们选取如下辅助函数

$$H_1(y) = H_2(y) = \frac{1}{y^2}. \quad (3-29)$$

则高阶形变方程 (3-19) 和 (3-20) 的通解为

$$\varphi_m(y) = \chi_m \varphi_{m-1}(y) + c_0 \int_0^y \int_0^\eta \frac{\delta_{1,m-1}(\tau)}{\tau^2} d\tau d\eta + D_{1,m}y + D_{2,m}, \quad (3-30)$$

$$S_m(y) = \chi_m S_{m-1}(y) + c_0 \int_0^y \int_0^\eta \frac{\delta_{2,m-1}(\tau)}{\tau^2} d\tau d\eta + D_{3,m}y + D_{4,m}, \quad (3-31)$$

这里,  $D_{1,m}$ ,  $D_{2,m}$ ,  $D_{3,m}$  和  $D_{4,m}$  为待求未知常数。注意到, 此时通解 (3-30) 和 (3-31) 中有五个未知常数:  $D_{1,m}$ ,  $D_{2,m}$ ,  $D_{3,m}$ ,  $D_{4,m}$  和  $Q_{m-1}$ , 而我们恰好有五个限制条件: (3-21)、(3-22) 和 (3-23)。因此  $\varphi_m(y)$ 、 $S_m(y)$  和  $Q_{m-1}$  可被唯一确定。当依次求出  $\varphi_1(y)$ 、 $S_1(y)$ 、 $Q_0$ ,  $\varphi_2(y)$ 、 $S_2(y)$ 、 $Q_1 \cdots$  后, 可得  $\varphi(y)$ 、 $S(y)$  和  $Q$  的  $M$  阶同伦近似解

$$\tilde{\varphi}(y) = \sum_{m=0}^M \varphi_m(y), \quad \tilde{S}(y) = \sum_{m=0}^M S_m(y), \quad \tilde{Q} = \sum_{m=0}^M Q_m. \quad (3-32)$$

注意到在同伦分析方法的框架中, 引入迭代技巧往往能加速级数解收敛 [30]。若我们把  $\varphi(y)$  和  $S(y)$  的  $M$  阶同伦近似解分别替代  $\varphi_0(y)$ 、 $S_0(y)$ , 并作为下一次迭代的作为初始猜测解, 我们称该方法为  $m$  阶同伦迭代。同时为了避免迭代过程中项数出现指数型增长, 我们对高阶形变方程 (3-19)、(3-20) 进行截断, 即

$$c_0 H_1(y) \cdot \delta_{1,m}(y) \approx \sum_{k=0}^N E_{m,k} \cdot y^k, \quad c_0 H_2(y) \cdot \delta_{2,m}(y) \approx \sum_{k=0}^N F_{m,k} \cdot y^k, \quad (3-33)$$

这里,  $E_{m,k}$  和  $F_{m,k}$  为常数,  $N$  称为截断项数。为了刻画计算精度, 我们定义如下误差

$$\mathcal{E} = \int_0^1 \left\{ \left( \mathcal{N}_1 [\tilde{\varphi}(y), \tilde{S}(y), y] \right)^2 + \left( \mathcal{N}_2 [\tilde{\varphi}(y), \tilde{S}(y), y] \right)^2 \right\} dy. \quad (3-34)$$

### 3.1.2 结果

不失一般性，本章所有工况的泊松比均取  $\nu = 0.3$ 。

#### 3.1.2.1 同伦非迭代方法

本节我们使用同伦非迭代方法，并先考虑工况：固定夹紧边界条件， $a = 5$ （即： $w(0)/h = 3.03$ ）。第 25 阶的误差曲线如图 3-1 所示，可以发现最优的收敛控制参数  $c_0 = -0.28$ （对应最小的误差  $\mathcal{E}$ ）。我们取  $c_0 = -0.28$ ，发现对于  $a = 5$  这个算例，误差  $\mathcal{E}$  可迅速降至  $4.9 \times 10^{-12}$ ，如表 3-1 所示。这说明对于  $a = 5$ （即  $w(0)/h = 3.03$ ）这个算例，同伦分析方法可迅速给出收敛的解析近似解。注意到，摄动方法 [56] 的有效域仅为  $w(0)/h < 2.44 < 3.03$ 。显然，同伦分析方法优于摄动方法。

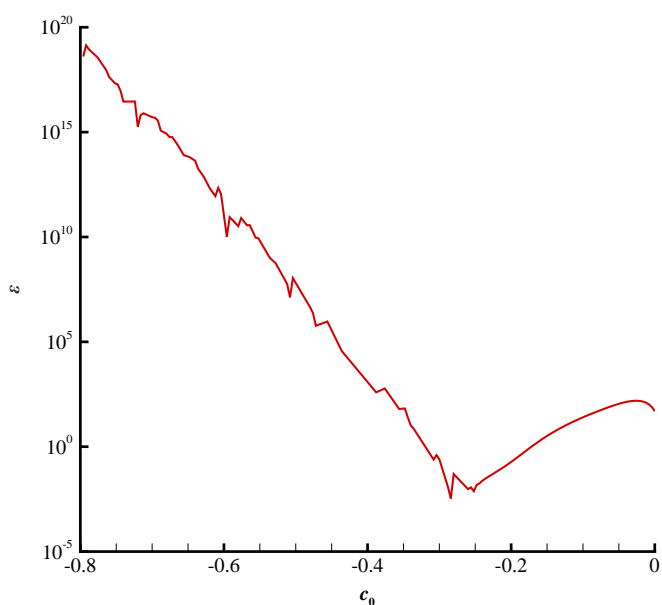


图 3-1 微分形式的大挠度圆薄板方程，在固定夹紧边界条件下， $a = 5$ ，采用同伦非迭代方法得到的第 25 阶误差曲线。

Fig. 3-1 The sum of squared residual errors  $\mathcal{E}$  versus  $c_0$  in the case of  $a = 5$  for a circular plate with clamped boundary, gained by the HAM-based approach (without iteration).

表 3-1 微分形式的大挠度圆薄板方程, 在固定夹紧边界条件下,  $a = 5$ , 使用同伦非迭代方法并取  $c_0 = -0.28$  的计算结果。

Table 3-1 The approximations of  $Q$ , the squared residual errors  $\mathcal{E}$  and the used CPU time in the case of  $a = 5$  with the clamped boundary by means of the HAM (without iteration) using  $c_0 = -0.28$ .

$m$ , order of approx.	$\mathcal{E}$	$Q$	CPU time (seconds)
20	$6.4 \times 10^{-2}$	131.7	6
40	$5.8 \times 10^{-4}$	132.1	35
60	$9.3 \times 10^{-6}$	132.1	106
80	$2.0 \times 10^{-7}$	132.2	243
100	$5.1 \times 10^{-9}$	132.2	465
120	$1.5 \times 10^{-10}$	132.2	782
140	$4.9 \times 10^{-12}$	132.2	1205

根据计算, 在固定夹紧的边界条件下, 对于给定值  $a$ , 最优的  $c_0$  满足如下经验公式

$$c_0 = -\frac{50}{50 + 0.45 \cdot a^{\frac{7}{2}}} \quad (0 \leq a \leq 5). \quad (3-35)$$

注意到, 当给定  $a$  时, 得到的同伦级数解  $\varphi(y)$  和  $S(y)$  均为  $a$  的幂级数。我们将在 3.1.3 节中给出证明: 所有的摄动方法 (包括 Vincent 摄动方法 [54] 和钱伟长法 [55]) 实际上均为同伦分析方法在  $c_0 = -1$  的特例。

### 3.1.2.2 同伦迭代方法

本节我们采用同伦迭代方法, 并同样先考虑算例: 固定夹紧边界条件,  $a = 5$  (即  $w(0)/h = 3.03$ )。如图 3-2 所示, 此时最优的收敛控制参数  $c_0 = -0.55$ 。表 3-2 给出了  $c_0 = -0.55$  的计算结果, 可以发现仅需迭代 40 次, 25s 时间, 误差  $\mathcal{E}$  即降至  $1.7 \times 10^{-24}$ 。在达到同样精度的条件下, 同伦迭代方法的计算效率比非迭代的方法快百倍, 如表 3-1 和 3-2 所示。因此本章之后所有算例, 我们均采用同伦迭代方法。

在使用同伦迭代方法之前, 我们首先需要选取合适的迭代阶数  $M$  和截断项数  $N$ 。图 3-5 探究了不同迭代阶数  $M$  对计算效率的影响, 可以发现, 一阶迭代的计算效率最高, 而且采用不同的迭代阶数  $M$  对收敛精度没有影响。因此从计算效率的角度出发, 下文我们均采用一阶同伦迭代方法, 即  $M = 1$ 。此

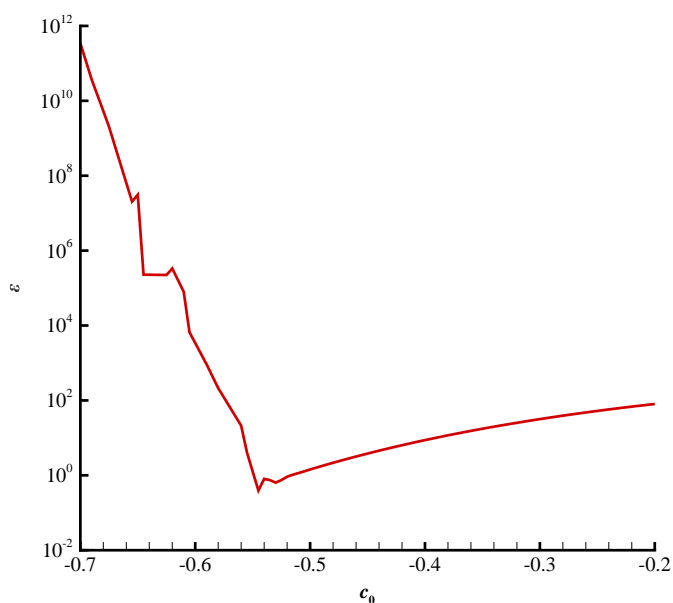


图 3-2 微分形式的大挠度圆薄板方程，在固定夹紧边界条件下， $a = 5$ ， $N = 100$ ，采用一阶同伦迭代方法得到的第 7 阶误差曲线。

Fig. 3-2 The sum of squared residual errors  $\mathcal{E}$  versus  $c_0$  in the case of  $a = 5$  for a circular plate with clamped boundary, gained by the 1st HAM iteration approach using  $N = 100$ .

表 3-2 微分形式的大挠度圆薄板方程，在固定夹紧边界条件下， $a = 5$ ， $N = 100$ ，使用同伦迭代方法并取  $c_0 = -0.55$  的计算结果。

Table 3-2 The approximations of  $Q$ , the squared residual errors  $\mathcal{E}$  and the used CPU time versus iteration times in the case of  $a = 5$  with the clamped boundary, given by the 1st-order HAM iteration approach using  $c_0 = -0.55$  with the truncation order  $N = 100$ .

$m$ , iteration times.	$\mathcal{E}$	$Q$	CPU time (seconds)
10	$4.5 \times 10^{-3}$	132.2	5
20	$4.8 \times 10^{-11}$	132.2	12
30	$1.3 \times 10^{-18}$	132.2	18
40	$1.7 \times 10^{-24}$	132.2	25

外当  $N$  越大，显然结果精度越高，但计算效率越低；而当  $a$  越大，方程非线性

越强，若结果要保证一定的精度， $N$  却不得不随之增大。为同时保证收敛精度和计算效率，我们给出如下经验公式

$$N = \text{Max} \{100, \gamma \cdot a\}, \quad (3-36)$$

这里  $\gamma$  与边界条件有关：

- (a) 固定夹紧：  $\gamma = 10$ ；                      (b) 可移夹紧：  $\gamma = 13$ ；  
 (c) 简单支承：  $\gamma = 7$ ；                      (d) 简单铰链支承：  $\gamma = 5$ 。

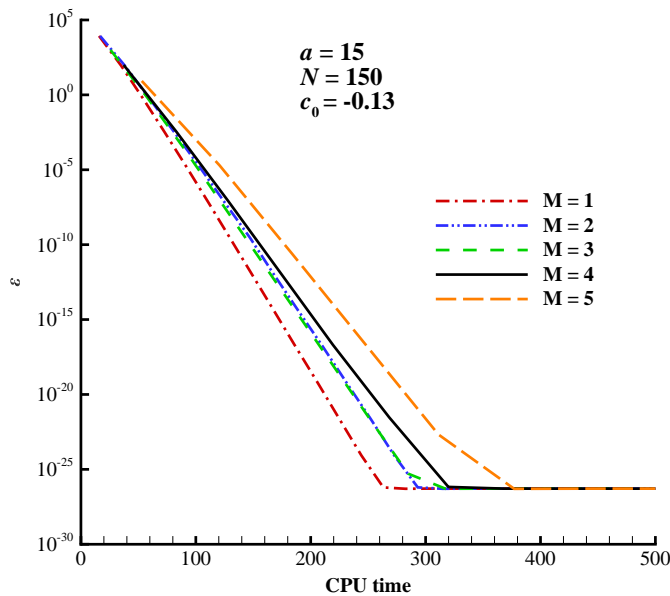


图 3-3 微分形式的大挠度圆薄板方程，在固定夹紧边界条件下， $a = 15$ ， $N = 150$ ， $c_0 = -0.13$ ，迭代阶数  $M$  对计算效率的影响。

Fig. 3-3 The squared residual error versus the CPU times in the case of  $a = 15$  with clamped boundary, given by the HAM iteration approach using  $c_0 = -0.13$  with the truncation order  $N = 150$  and different order  $M$  of iteration approach.

根据计算，在固定夹紧边界条件下，最优的收敛控制参数  $c_0$  满足如下经验公式

$$c_0 = -\frac{26}{26 + a^2}, \quad 0 \leq a \leq 35. \quad (3-37)$$

相应的计算结果如表3-3所示。图3-4比较了由一阶同伦迭代方法与摄动方法和内插迭代法给出的结果。发现一阶同伦迭代方法给出的结果与内插迭代法相吻合；而且一阶同伦迭代方法的收敛域远大于摄动方法。这些均说明了同伦分析方法的有效性和优越性！固定夹紧边界条件下的挠曲线如图3-5所示。

表 3-3 微分形式的大挠度圆薄板方程，在固定夹紧边界条件下，使用一阶同伦迭代方法得到的结果。

Table 3-3 The homotopy-approximation of the load  $Q$  versus  $a$  for clamped boundary, given by the HAM-based 1st-order iteration approach with the truncation order  $N$  given by (3-36) and the optimal convergence-control parameter  $c_0$  given by (3-37).

$a$	$c_0$	$N$	$Q$
5	-0.51	100	132.2
10	-0.21	100	957.7
15	-0.10	150	3152.1
20	-0.06	200	7386.9
25	-0.04	250	14334.1
30	-0.03	300	24665.7
35	-0.02	350	39053.6

类似得，对于可移夹紧边界条件，我们选取最优的收敛控制参数  $c_0$

$$c_0 = -\frac{39}{39 + a^2}, \quad 0 \leq a \leq 35, \quad (3-38)$$

相应的计算结果如表3-4所示。对于简单支承边界条件，我们选取最优的收敛控制参数  $c_0$ ：

$$c_0 = -\frac{80}{80 + a^2}, \quad 0 \leq a \leq 50, \quad (3-39)$$

相应的计算结果如表3-5所示。对于简单铰链支承边界条件，最优的收敛控制参数  $c_0$  满足如下经验公式：

$$c_0 = -\frac{40}{40 + a^{\frac{5}{2}}}, \quad 0 \leq a \leq 50, \quad (3-40)$$

相应的计算结果如表3-6所示。

表 3-4 微分形式的大挠度圆薄板方程, 在可移夹紧边界条件下, 使用一阶同伦迭代方法得到的结果。

Table 3-4 The convergent homotopy-approximation of the load  $Q$  in case of different values of  $a$  for a circular plate with moveable clamped boundary, given by the HAM-based 1st-order iteration approach using the truncation order  $N$  given by (3-36) and the optimal convergence-control parameter  $c_0$  given by (3-38).

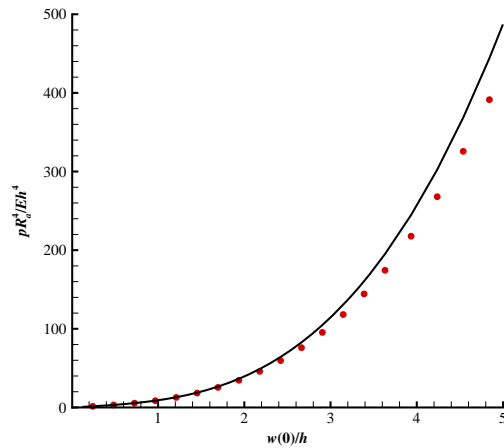
$a$	$c_0$	$N$	$Q$
5	-0.61	100	49.3
10	-0.28	130	240.1
15	-0.15	195	657.7
20	-0.09	260	1372.5
25	-0.06	325	2450.9
30	-0.04	390	3956.8
35	-0.03	455	5952.2

表 3-5 微分形式的大挠度圆薄板方程, 在简单支承边界条件下, 使用一阶同伦迭代方法得到的结果。

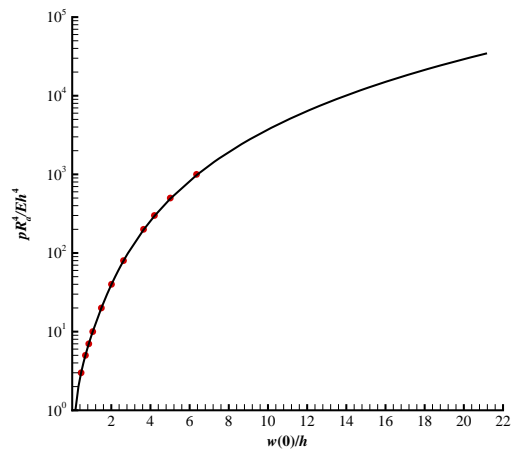
Table 3-5 The convergent homotopy-approximation of the load  $Q$  in case of different values of  $a$  for a circular plate with the simple support boundary, given by the HAM-based 1st-order iteration approach with the truncation order  $N$  given by (3-36) and the optimal convergence-control parameter  $c_0$  given by (3-39).

$a$	$c_0$	$N$	$Q$
10	-0.44	100	107.8
20	-0.17	140	737.4
30	-0.08	210	2304.8
40	-0.05	280	5199.8
50	-0.03	350	9799.3





(a) 对比一阶同伦迭代方法和摄动方法 [55]



(b) 对比一阶同伦迭代方法和内插迭代法 [51]

图 3-4 微分形式的大挠度圆薄板方程，在固定夹紧边界条件下，对比一阶同伦迭代方法与摄动方法和内插迭代法。

Fig. 3-4 Comparison of the results given by the HAM-based 1st-order iteration approach and other methods for clamped boundary. Solid line: results given by the HAM; Symbols: results given by Chien's perturbation method [55] (a) and by Zheng [51] using the interpolation iterative method (b).

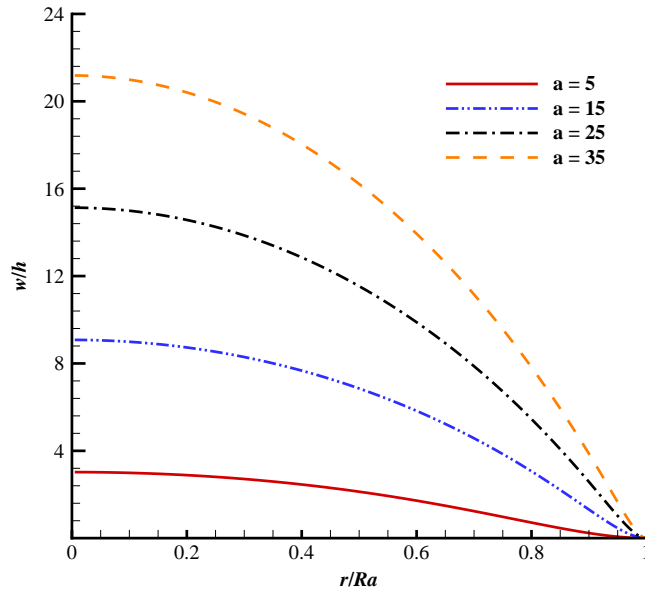


图 3-5 微分形式的大挠度圆薄板方程, 在固定夹紧边界条件下, 由一阶同伦迭代方法给出的挠曲线

Fig. 3-5 The deflections of a thin circular plate with clamped boundary given by the HAM-based 1st-order iteration approach in the case of  $a = 5, 15, 25, 35$ . Solid line:  $pR_a^4/Eh^4 = 117.2$ ; Dash-double-dotted line:  $pR_a^4/Eh^4 = 2795.2$ ; Dash-dotted line:  $pR_a^4/Eh^4 = 12711.2$ ; Dashed line:  $pR_a^4/Eh^4 = 34632.0$ .

### 3.1.3 证明摄动方法为同伦分析方法的一个特例

本节我们将证明摄动方法 (包括 Vincent 摄动方法 [54] 和钱伟长法 [55]) 实际上是同伦分析方法在  $c_0 = -1$  的一个特例。

通常情况, 摄动解可表示为

$$u^P(y) = u_0^P(y) + u_1^P(y)\varepsilon + u_2^P(y)\varepsilon^2 + \cdots,$$

这里  $\varepsilon$  为物理小参数。而同伦级数解为

$$u^H(y; c_0) = u_0^H(y; c_0) + u_1^H(y; c_0) + u_2^H(y; c_0) + \cdots$$

欲证明: 摄动法是同伦分析方法在  $c_0 = -1$  的一个特例 (即  $u^P(y) = u^H(y; -1)$ )。

只需证:  $u_i^P(y)\varepsilon^i = u_i^H(y; -1)$  (这里:  $i = 0, 1, 2, \cdots$ )。

表 3-6 微分形式的大挠度圆薄板方程，在简单铰链支承边界条件下，使用一阶同伦迭代方法得到的结果。

Table 3-6 The convergent homotopy-approximation of the load  $Q$  in case of different values of  $a$  for a circular plate with the boundary of simple hinged support given by the HAM-based 1st-order iteration approach with the truncation order  $N$  given by (3-36) and the optimal convergence-control parameter  $c_0$  given by (3-40).

$a$	$c_0$	$N$	$Q$
10	-0.112	100	890.0
20	-0.021	100	7152.3
30	-0.008	150	24166.4
40	-0.004	200	57308.7
50	-0.002	250	111955.3

应用摄动法求解均布外载荷作用下的大挠度圆薄板方程的计算步骤如下所示：

$\zeta$  表示摄动变量，我们把  $\varphi(y)$ 、 $S(y)$ 、 $Q$  和  $W(y)$  均对  $\zeta$  进行摄动展开

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi^{(P)}(y) = \sum_{i=1}^{+\infty} \varphi_i^{(P)}(y) \zeta^{2i-1}, \quad S^{(P)}(y) = \sum_{i=1}^{+\infty} S_i^{(P)}(y) \zeta^{2i}, \\ Q^{(P)} = \sum_{i=1}^{+\infty} Q_i^{(P)} \zeta^{2i-1}, \quad W^{(P)}(0) = \sum_{i=1}^{+\infty} W_i^{(P)}(0) \zeta^{2i-1}. \end{array} \right. \quad (3-41)$$

令

$$S_0^{(P)}(y) = 0.$$

然后把级数 (3-41) 代入到原始方程 (3-1)-(3-4) 和 (3-7) 中，并让方程左右两边  $\zeta^m$  前系数相等，可得到如下控制方程

$$y^2 \frac{d^2 \varphi_m^{(P)}(y)}{dy^2} = \sum_{i=1}^m \varphi_i^{(P)}(y) S_{m-i}^{(P)}(y) + Q_m^{(P)} \cdot y^2, \quad (3-42)$$

$$y^2 \frac{d^2 S_m^{(P)}(y)}{dy^2} = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \varphi_i^{(P)}(y) \varphi_{m+1-i}^{(P)}(y), \quad (3-43)$$

服从边界条件

$$\varphi_m^{(P)}(0) = S_m^{(P)}(0) = 0, \quad (3-44)$$

$$\varphi_m^{(P)}(1) = \frac{\lambda}{\lambda - 1} \cdot \frac{d\varphi_m^{(P)}(y)}{dy} \Big|_{y=1}, \quad S_m^{(P)}(1) = \frac{\mu}{\mu - 1} \cdot \frac{dS_m^{(P)}(y)}{dy} \Big|_{y=1}, \quad (3-45)$$

和限制条件

$$- \int_0^1 \frac{1}{\varepsilon} \cdot \varphi_m^{(P)}(\varepsilon) d\varepsilon = W_m^{(P)}(0). \quad (3-46)$$

注意到, 物理参数  $\zeta$  与中心挠度  $W(0)$  相关, 其关系满足线性方程 [56]。因此, 求解过程中所有的未知量均可唯一确定。

我们让  $\varphi(y)$  和  $S(y)$  的初始猜测解均为 0, 并构造如下零阶形变方程

$$(1 - q)y^2 \frac{d^2 \tilde{\Phi}(y; q)}{dy^2} = c_0 \left[ q y^2 \frac{d^2 \tilde{\Phi}(y; q)}{dy^2} - \tilde{\Phi}(y; q) \tilde{\Xi}(y; q) - \tilde{\Theta}(q)y^2 \right], \quad (3-47)$$

$$(1 - q)y^2 \frac{d^2 \tilde{\Xi}(y; q)}{dy^2} = c_0 \left[ q y^2 \frac{d^2 \tilde{\Xi}(y; q)}{dy^2} + \left( \frac{1}{2q} \right) \tilde{\Phi}^2(y; q) \right], \quad (3-48)$$

服从边界条件

$$\tilde{\Phi}(0; q) = \tilde{\Xi}(0; q) = 0, \quad (3-49)$$

$$\tilde{\Phi}(1; q) = \frac{\lambda}{\lambda - 1} \cdot \frac{\partial \tilde{\Phi}(y; q)}{\partial y} \Big|_{y=1}, \quad \tilde{\Xi}(1; q) = \frac{\mu}{\mu - 1} \cdot \frac{\partial \tilde{\Xi}(y; q)}{\partial y} \Big|_{y=1}, \quad (3-50)$$

和限制条件

$$- \int_0^1 \frac{1}{\varepsilon} \tilde{\Phi}(\varepsilon; q) d\varepsilon = \tilde{\Psi}(q). \quad (3-51)$$

当  $q = 0$  时, 零阶形变方程 (3-47)-(3-51) 的解为

$$\tilde{\Phi}(y; 0) = 0, \quad \tilde{\Xi}(y; 0) = 0. \quad (3-52)$$

当  $q = 1$  时, 若假定

$$\tilde{\Phi}(y; 1) = \varphi(y), \quad \tilde{\Xi}(y; 1) = S(y), \quad \tilde{\Theta}(1) = Q, \quad \tilde{\Psi}(1) = W(0). \quad (3-53)$$

则方程 (3-47)-(3-51) 可化为原始方程 (3-1)-(3-4) 和 (3-10)。结合 (3-52),  $\tilde{\Phi}(y; q)$ ,  $\tilde{\Xi}(y; q)$ ,  $\tilde{\Theta}(q)$  和  $\tilde{\Psi}(q)$  可展开成如下麦克劳林级数

$$\begin{cases} \tilde{\Phi}(y; q) = \sum_{m=1}^{+\infty} \tilde{\varphi}_m(y) q^m, & \tilde{\Xi}(y; q) = \sum_{m=1}^{+\infty} \tilde{S}_m(y) q^m, \\ \tilde{\Theta}(q) = \sum_{m=0}^{+\infty} \tilde{Q}_m q^m, & \tilde{\Psi}(q) = \sum_{m=0}^{+\infty} \tilde{W}_m(0) q^m. \end{cases} \quad (3-54)$$

把 (3-54) 代入方程 (3-47)-(3-51), 并让方程左右两边  $q^m$  前系数相等, 易得  $\tilde{Q}_0 = 0$ ,  $\tilde{W}_0(0) = 0$ , 且  $m$  阶形变方程为

$$\begin{aligned} & y^2 \frac{d^2}{dy^2} [\tilde{\varphi}_m(y) - \chi_m \tilde{\varphi}_{m-1}(y)] \\ &= c_0 \left( y^2 \frac{d^2 \tilde{\varphi}_{m-1}(y)}{dy^2} - \sum_{i=1}^m \tilde{\varphi}_i(y) \tilde{S}_{m-i}(y) - \tilde{Q}_m y^2 \right), \end{aligned} \quad (3-55)$$

$$\begin{aligned} & y^2 \frac{d^2}{dy^2} [\tilde{S}_m(y) - \chi_m \tilde{S}_{m-1}(y)] \\ &= c_0 \left( y^2 \frac{d^2 \tilde{S}_{m-1}(y)}{dy^2} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \tilde{\varphi}_i(y) \tilde{\varphi}_{m+1-i}(y) \right). \end{aligned} \quad (3-56)$$

服从边界条件

$$\tilde{\varphi}_m(0) = \tilde{S}_m(0) = 0, \quad (3-57)$$

$$\tilde{\varphi}_m(1) = \frac{\lambda}{\lambda-1} \cdot \frac{d\tilde{\varphi}_m(y)}{dy} \Big|_{y=1}, \quad \tilde{S}_m(1) = \frac{\mu}{\mu-1} \cdot \frac{d\tilde{S}_m(y)}{dy} \Big|_{y=1}, \quad (3-58)$$

和限制条件

$$- \int_0^1 \frac{1}{\varepsilon} \cdot \tilde{\varphi}_m(\varepsilon) d\varepsilon = \tilde{W}_m(0), \quad (3-59)$$

这里  $\chi_m$  由 (3-24) 定义。

取  $c_0 = -1$ , 可以发现: 高阶形变方程 (3-55)-(3-59) 除了在一阶形变方程中的边界条件  $\tilde{\varphi}_1(y) = \zeta \cdot \varphi_1^{(P)}(y)$  与摄动方法不相同之外, 其余部分与摄动方法 (3-42)-(3-46) 完全一致。易得

$$\begin{cases} \tilde{\varphi}_m(y) = \varphi_m^{(P)}(y) \zeta^{2m-1}, & \tilde{S}_m(y) = S_m^{(P)}(y) \zeta^{2m}, \\ \tilde{Q}_m = Q_m^{(P)} \zeta^{2m-1}, & \tilde{W}_m(0) = W_m^{(P)}(0) \zeta^{2m-1}. \end{cases} \quad (3-60)$$

因此, 采用摄动变量  $\zeta$  的摄动方法仅为同伦分析方法在  $c_0 = -1$  的一个特例, 得证。

若取  $\zeta = Q$ , 并让  $\tilde{\Theta}(q) = Q \cdot q$ , 即:  $\tilde{Q}_1 = Q$ ,  $\tilde{Q}_m = 0$  (当  $m \geq 2$ ), 有

$$q: \begin{cases} y^2 \frac{d^2 \tilde{\varphi}_1(y)}{dy^2} = Q \cdot y^2, & y^2 \frac{d^2 \tilde{S}_1(y)}{dy^2} = -\frac{1}{2} (\tilde{\varphi}_1(y))^2, \\ \tilde{\varphi}_1(0) = 0, & \tilde{\varphi}_1(1) = \frac{\lambda}{\lambda-1} \frac{d\tilde{\varphi}_1(y)}{dy} \Big|_{y=1}, \\ \tilde{S}_1(0) = 0, & \tilde{S}_1(1) = \frac{\mu}{\mu-1} \frac{d\tilde{S}_1(y)}{dy} \Big|_{y=1}; \end{cases} \quad (3-61)$$

$$q^2 : \begin{cases} y^2 \frac{d^2 \tilde{\varphi}_2(y)}{dy^2} = \tilde{\varphi}_1(y) \tilde{S}_1(y), \\ y^2 \frac{d^2 \tilde{S}_2(y)}{dy^2} = -\tilde{\varphi}_1(y) \tilde{\varphi}_2(y), \\ \tilde{\varphi}_2(0) = 0, \quad \tilde{\varphi}_2(1) = \frac{\lambda}{\lambda - 1} \frac{d\tilde{\varphi}_2(y)}{dy} \Big|_{y=1}, \\ \tilde{S}_2(0) = 0, \quad \tilde{S}_2(1) = \frac{\mu}{\mu - 1} \frac{d\tilde{S}_2(y)}{dy} \Big|_{y=1}; \end{cases} \quad (3-62)$$

.....

$$q^{i+1} : \begin{cases} y^2 \frac{d^2 \tilde{\varphi}_{i+1}(y)}{dy^2} = \sum_{j=1}^i \tilde{\varphi}_j(y) \tilde{S}_{i-j+1}(y), \\ y^2 \frac{d^2 \tilde{S}_{i+1}(y)}{dy^2} = -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{i+1} \tilde{\varphi}_j(y) \tilde{\varphi}_{i-j+2}(y), \\ \tilde{\varphi}_{i+1}(0) = 0, \quad \tilde{\varphi}_{i+1}(1) = \frac{\lambda}{\lambda - 1} \frac{d\tilde{\varphi}_{i+1}(y)}{dy} \Big|_{y=1}, \\ \tilde{S}_{i+1}(0) = 0, \quad \tilde{S}_{i+1}(1) = \frac{\mu}{\mu - 1} \frac{d\tilde{S}_{i+1}(y)}{dy} \Big|_{y=1}; \end{cases} \quad (3-63)$$

在固定夹紧边界条件下, 取  $\lambda = 0$ ,  $\mu = 20/7$ , 同伦近似解为

$$\tilde{\varphi}_1(y) = Q \cdot \left( -\frac{y}{2} + \frac{y^2}{2} \right), \quad (3-64)$$

$$\tilde{S}_1(y) = Q^2 \cdot \left( \frac{41y}{672} - \frac{y^2}{16} + \frac{y^3}{24} - \frac{y^4}{96} \right), \quad (3-65)$$

$$\tilde{\varphi}_2(y) = Q^3 \cdot \left( \frac{659y}{80640} - \frac{41y^2}{2688} + \frac{83y^3}{8064} - \frac{5y^4}{1152} + \frac{y^5}{768} - \frac{y^6}{5760} \right), \quad (3-66)$$

$$\tilde{S}_2(y) = Q^4 \cdot \left( -\frac{2357y}{1505280} + \frac{659y^2}{322560} - \frac{1889y^3}{967680} + \frac{103y^4}{96768} - \frac{59y^5}{161280} + \frac{13y^6}{138240} - \frac{17y^7}{967680} + \frac{y^8}{645120} \right), \quad (3-67)$$

.....

这与 Vincent[54] 摄动解 (1-14)-(1-17) 完全一致。

若取  $\zeta = W(0)$ ,  $\tilde{\Psi}(q) = W(0) \cdot q$ , 可得

$$q : \begin{cases} y^2 \frac{d^2 \tilde{\varphi}_1(y)}{dy^2} = \tilde{Q}_1 y^2, & y^2 \frac{d^2 \tilde{S}_1(y)}{dy^2} = -\frac{1}{2} (\tilde{\varphi}_1(y))^2, \\ \tilde{\varphi}_1(0) = 0, & \tilde{\varphi}_1(1) = \frac{\lambda}{\lambda-1} \frac{d\tilde{\varphi}_1(y)}{dy} \Big|_{y=1}, \\ -\int_0^1 \frac{1}{\epsilon} \tilde{\varphi}_1(\epsilon) d\epsilon = W(0), \\ \tilde{S}_1(0) = 0, & \tilde{S}_1(1) = \frac{\mu}{\mu-1} \frac{d\tilde{S}_1(y)}{dy} \Big|_{y=1}; \end{cases} \quad (3-68)$$

$$q^2 : \begin{cases} y^2 \frac{d^2 \tilde{\varphi}_2(y)}{dy^2} = \tilde{\varphi}_1(y) \tilde{S}_1(y) + \tilde{Q}_2 y^2, \\ y^2 \frac{d^2 \tilde{S}_2(y)}{dy^2} = -\tilde{\varphi}_1(y) \tilde{\varphi}_2(y), \\ \tilde{\varphi}_2(0) = 0, & \tilde{\varphi}_2(1) = \frac{\lambda}{\lambda-1} \frac{d\tilde{\varphi}_2(y)}{dy} \Big|_{y=1}, \\ -\int_0^1 \frac{1}{\epsilon} \tilde{\varphi}_2(\epsilon) d\epsilon = 0, \\ \tilde{S}_2(0) = 0, & \tilde{S}_2(1) = \frac{\mu}{\mu-1} \frac{d\tilde{S}_2(y)}{dy} \Big|_{y=1}; \end{cases} \quad (3-69)$$

.....

$$q^{i+1} : \begin{cases} y^2 \frac{d^2 \tilde{\varphi}_{i+1}(y)}{dy^2} = \sum_{j=1}^i \tilde{\varphi}_j(y) \tilde{S}_{i-j+1}(y) + \tilde{Q}_{i+1} y^2, \\ y^2 \frac{d^2 \tilde{S}_{i+1}(y)}{dy^2} = -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{i+1} \tilde{\varphi}_j(y) \tilde{\varphi}_{i-j+2}(y), \\ \tilde{\varphi}_{i+1}(0) = 0, & \tilde{\varphi}_{i+1}(1) = \frac{\lambda}{\lambda-1} \frac{d\tilde{\varphi}_{i+1}(y)}{dy} \Big|_{y=1}, \\ -\int_0^1 \frac{1}{\epsilon} \tilde{\varphi}_{i+1}(\epsilon) d\epsilon = 0, \\ \tilde{S}_{i+1}(0) = 0, & \tilde{S}_{i+1}(1) = \frac{\mu}{\mu-1} \frac{d\tilde{S}_{i+1}(y)}{dy} \Big|_{y=1}; \end{cases} \quad (3-70)$$

在固定夹紧边界条件下, 取  $\lambda = 0$ ,  $\mu = 20/7$ , 同伦近似解为

$$\tilde{\varphi}_1(y) = W(0) \cdot (-2y + 2y^2), \quad (3-71)$$

$$\tilde{S}_1(y) = W^2(0) \cdot \left( \frac{41y}{42} - y^2 + \frac{2y^3}{3} - \frac{y^4}{6} \right), \quad (3-72)$$

$$\tilde{\varphi}_2(y) = W^3(0) \cdot \left( \frac{233y}{1890} - \frac{2179y^2}{3780} + \frac{83y^3}{126} - \frac{5y^4}{18} + \frac{y^5}{12} - \frac{y^6}{90} \right), \quad (3-73)$$

$$\begin{aligned} \tilde{S}_2(y) = W^4(0) \cdot & \left( -\frac{211y}{19845} + \frac{233y^2}{1890} - \frac{529y^3}{2268} + \frac{667y^4}{3240} - \frac{59y^5}{630} \right. \\ & \left. + \frac{13y^6}{540} - \frac{17y^7}{3780} + \frac{y^8}{2520} \right), \end{aligned} \quad (3-74)$$

.....

这又与钱伟长 [55] 给出的摄动解 (1-23)-(1-26) 完全一致。因此, 摄动法的确仅为同伦分析方法在  $c_0 = -1$  的一个特例。

### 3.1.4 证明修正迭代法为同伦分析方法的一个特例

本节我们将证明修正迭代法为一阶同伦迭代方法在  $c_0 = -1$  的一个特例。若我们采取一阶同伦迭代方法, 则在每一次迭代之后, 将把新的同伦近似解  $\varphi^*(y) = \varphi_0(y) + \varphi_1(y)$  和  $S^*(y) = S_0(y) + S_1(y)$  取代  $\varphi_0(y)$  和  $S_0(y)$ , 并作为下一次迭代的初始猜测解。由公式 (3-19) 和 (3-20) 可知

$$y^2 \frac{d^2 \varphi_1(y)}{dy^2} = c_0 \left[ y^2 \frac{d^2 \varphi_0(y)}{dy^2} - \varphi_0(y) S_0(y) - Q_0 y^2 \right], \quad (3-75)$$

$$y^2 \frac{d^2 S_1(y)}{dy^2} = c_0 \left[ y^2 \frac{d^2 S_0(y)}{dy^2} + \frac{1}{2} \varphi_0^2(y) \right]. \quad (3-76)$$

因此,  $\varphi^*(y)$  和  $S^*(y)$  满足控制方程

$$\begin{aligned} y^2 \frac{d^2 \varphi^*(y)}{dy^2} &= y^2 \frac{d^2 \varphi_0(y)}{dy^2} + y^2 \frac{d^2 \varphi_1(y)}{dy^2} \\ &= (1 + c_0) y^2 \frac{d^2 \varphi_0(y)}{dy^2} - c_0 [\varphi_0(y) S_0(y) + Q_0 y^2], \end{aligned} \quad (3-77)$$

$$\begin{aligned} y^2 \frac{d^2 S^*(y)}{dy^2} &= y^2 \frac{d^2 S_0(y)}{dy^2} + y^2 \frac{d^2 S_1(y)}{dy^2} \\ &= (1 + c_0) y^2 \frac{d^2 S_0(y)}{dy^2} - \frac{c_0}{2} \varphi_0^2(y), \end{aligned} \quad (3-78)$$



并服从边界条件

$$\varphi^*(0) = S^*(0) = 0, \quad (3-79)$$

$$\varphi^*(1) = \frac{\lambda}{\lambda-1} \cdot \frac{d\varphi^*(y)}{dy} \Big|_{y=1}, \quad S^*(1) = \frac{\mu}{\mu-1} \cdot \frac{dS^*(y)}{dy} \Big|_{y=1}, \quad (3-80)$$

和限制条件

$$W(0) = - \int_0^1 \frac{1}{\varepsilon} \varphi^*(\varepsilon) d\varepsilon. \quad (3-81)$$

取  $c_0 = -1$ , 可得

$$y^2 \frac{d^2 \varphi^*(y)}{dy^2} = \varphi_0(y) S_0(y) + Q_0 y^2, \quad (3-82)$$

$$y^2 \frac{d^2 S^*(y)}{dy^2} = \frac{1}{2} \varphi_0^2(y), \quad (3-83)$$

并服从边界条件

$$\varphi^*(0) = S^*(0) = 0, \quad (3-84)$$

$$\varphi^*(1) = \frac{\lambda}{\lambda-1} \cdot \frac{d\varphi^*(y)}{dy} \Big|_{y=1}, \quad S^*(1) = \frac{\mu}{\mu-1} \cdot \frac{dS^*(y)}{dy} \Big|_{y=1}, \quad (3-85)$$

和限制条件

$$W(0) = - \int_0^1 \frac{1}{\varepsilon} \varphi^*(\varepsilon) d\varepsilon. \quad (3-86)$$

我们采取以下迭代步骤:

- (1) 利用公式 (3-83)-(3-85) 计算  $S^*(y)$ ;
- (2) 让  $S^*(y)$  取代  $S_0(y)$ , 并作为新的初始猜测解, 即  $S_0(y) = S^*(y)$ ;
- (3) 利用公式 (3-82) 和 (3-84)-(3-86) 计算  $\varphi^*(y)$  和  $Q_0$ ;
- (4) 让  $\varphi^*(y)$  取代  $\varphi_0(y)$  并作为新的初始猜测解, 即  $\varphi_0(y) = \varphi^*(y)$ 。

按上述步骤迭代第  $n$  次时, 若令

$$\Theta_n(y) = \varphi^*(y), \quad \Upsilon_{n-1}(y) = S^*(y), \quad F_{n-1} = Q_0.$$

则有

$$y^2 \frac{d^2 \Upsilon_{n-1}(y)}{dy^2} = -\frac{1}{2} \Theta_{n-1}^2(y), \quad (3-87)$$

$$y^2 \frac{d^2 \Theta_n(y)}{dy^2} = \Theta_{n-1}(y) \Upsilon_{n-1}(y) + F_{n-1} y^2, \quad (3-88)$$

服从边界条件

$$\Theta_n(0) = \Upsilon_{n-1}(0) = 0, \quad (3-89)$$

$$\Theta_n(1) = \frac{\lambda}{\lambda - 1} \cdot \frac{d\Theta_n(y)}{dy} \Big|_{y=1}, \quad \Upsilon_{n-1}(1) = \frac{\mu}{\mu - 1} \cdot \frac{d\Upsilon_{n-1}(y)}{dy} \Big|_{y=1}, \quad (3-90)$$

和限制条件

$$W(0) = a = - \int_0^1 \frac{1}{\varepsilon} \Theta_n(\varepsilon) d\varepsilon. \quad (3-91)$$

此时我们取初始猜测解

$$\Theta_0(y) = \frac{-2a}{2\lambda + 1} [(\lambda + 1)y - y^2], \quad (3-92)$$

可以发现方程 (3-87)-(3-92) 与修正迭代法 [51, 57] 的计算步骤 (1-27)-(1-32) 完全一致。因此，修正迭代法 [51, 57] 为一阶同伦迭代方法在  $c_0 = -1$  时的一个特例，得证。

### 3.1.5 小结

求解均布外载荷作用下的大挠度圆薄板方程是固体力学中的经典问题。本文应用同伦分析方法成功求解了任意大均布外载荷作用下的大挠度圆薄板方程，并成功证明：摄动法和修正迭代法 [51, 57] 均可统一到同伦分析方法框架中。值得强调的是，摄动法 [56] 和修正迭代法 [51, 57] 都只在小载荷情况下有效。然而即使当  $w(0)/h > 20$ （方程为强非线性），通过选取合适的收敛控制参数  $c_0$ ，均可得到收敛的级数解。这成功说明了同伦分析方法对均布外载荷作用下的大挠度圆薄板方程之有效性和优越性。

## 3.2 求解积分形式的大挠度圆薄板方程

本节，我们以工况  $\lambda = 0$ ,  $\mu = 2/(1 - \nu)$ ,  $\nu = 0.3$  为例，介绍如何应用同伦分析方法求解大挠度圆薄板方程之积分形式，并证明内插迭代法也为同伦分析方法的一个特例。

### 3.2.1 给定外载荷 $Q$

若给定外加均布外载荷  $Q$ ，积分形式的大挠度圆薄板方程为

$$\mathcal{N}_1[\varphi(y), S(y)] = \varphi(y) + \int_0^1 \frac{1}{\varepsilon^2} K(y, \varepsilon) S(\varepsilon) \varphi(\varepsilon) d\varepsilon + \int_0^1 K(y, \varepsilon) Q d\varepsilon = 0, \quad (3-93)$$

$$\mathcal{N}_2[\varphi(y), S(y)] = S(y) - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{\varepsilon^2} G(y, \varepsilon) \varphi^2(\varepsilon) d\varepsilon = 0, \quad (3-94)$$

其中，

$$K(y, \varepsilon) = \begin{cases} (\lambda - 1)y\varepsilon + y, & y \leq \varepsilon, \\ (\lambda - 1)y\varepsilon + \varepsilon, & y > \varepsilon, \end{cases} \quad (3-95)$$

$$G(y, \varepsilon) = \begin{cases} (\mu - 1)y\varepsilon + y, & y \leq \varepsilon, \\ (\mu - 1)y\varepsilon + \varepsilon, & y > \varepsilon, \end{cases} \quad (3-96)$$

这里所有参数的定义与3.1节中相同。

#### 3.2.1.1 同伦分析方法求解步骤

我们构造如下零阶形变方程

$$(1 - q) [\Phi(y, q) - \varphi_0(y)] = c_1 q \mathcal{N}_1[\Phi(y, q), \Xi(y, q)], \quad (3-97)$$

$$(1 - q) [\Xi(y, q) - S_0(y)] = c_2 q \mathcal{N}_2[\Phi(y, q), \Xi(y, q)]. \quad (3-98)$$

则第  $m$  阶形变方程为

$$\varphi_k(y) = \chi_k \varphi_{k-1}(y) + c_1 \delta_{1,k-1}(y), \quad (3-99)$$

$$S_k(y) = \chi_k S_{k-1}(y) + c_2 \delta_{2,k-1}(y), \quad (3-100)$$

这里，

$$\begin{aligned} \delta_{1,k-1}(y) &= \varphi_{k-1}(y) + (1 - \chi_k) \int_0^1 K(y, \varepsilon) Q d\varepsilon \\ &+ \int_0^1 \frac{1}{\varepsilon^2} K(y, \varepsilon) \sum_{i=0}^{k-1} \varphi_i(\varepsilon) S_{k-1-i}(\varepsilon) d\varepsilon, \end{aligned} \quad (3-101)$$

$$\delta_{2,k-1}(y) = S_{k-1}(y) - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{\varepsilon^2} G(y, \varepsilon) \sum_{i=0}^{k-1} \varphi_i(\varepsilon) \varphi_{k-1-i}(\varepsilon) d\varepsilon, \quad (3-102)$$

$\varphi_i(y)$ 、 $S_i(y)$  和  $\chi_k$  定义请见3.1节。

为简单起见, 我们取

$$c_1 = c_2 = c_0, \quad (3-103)$$

并选取如下的初始猜测解

$$\varphi_0(y) = \frac{Qc_0}{2}[(\lambda + 1)y - y^2], \quad S_0(y) = 0. \quad (3-104)$$

为描述计算精度, 定义全局误差

$$\mathcal{E} = \int_0^1 \left\{ \left( \mathcal{N}_1 [\tilde{\varphi}(y), \tilde{S}(y)] \right)^2 + \left( \mathcal{N}_2 [\tilde{\varphi}(y), \tilde{S}(y)] \right)^2 \right\} dy. \quad (3-105)$$

### 3.2.1.2 同伦非迭代方法给出的结果

我们仍然先考虑工况  $Q = 5$ , 此时最优的收敛控制参数  $c_0 = -0.35$ , 相应的结果如表3-7所示。可以发现: 非迭代同伦分析方法在  $Q = 5$  ( $w(0)/h = 0.62$ ) 时仍然可以给出收敛的结果。然而 Vincent 摄动方法 [54] (以  $Q$  作为摄动参数) 仅在  $Q < 3.9$  ( $w(0)/h < 0.52$ ) 时有效, 这说明同伦分析方法比摄动方法更加有效。

根据计算, 若给定均布外载荷  $Q$ , 此时最优的收敛控制参数  $c_0$  满足如下经验公式,

$$c_0 = -\frac{13}{13 + Q^2} \quad (0 < Q \leq 5). \quad (3-106)$$

表3-8给出了取不同  $Q$  值的结果。

表 3-7 积分形式的大挠度圆薄板方程,  $Q = 5$ ,  $c_0 = -0.35$ , 使用非迭代同伦分析方法得到的结果。

Table 3-7 The squared residual error  $\mathcal{E}$  and the approximations of  $w(0)/h$  in the case of  $Q = 5$  by means of the HAM without iteration using  $c_0 = -0.35$ .

$m$ , order of approx.	$\mathcal{E}$	$w(0)/h$
10	$3 \times 10^{-4}$	0.64
20	$7 \times 10^{-5}$	0.62
30	$1 \times 10^{-5}$	0.62
40	$2 \times 10^{-6}$	0.62
50	$2 \times 10^{-7}$	0.62

表 3-8 积分形式的大挠度圆薄板方程, 给定不同的  $Q$  值, 使用非迭代同伦分析方法得到的结果。

Table 3-8 The homotopy-approximations of  $w(0)/h$  versus  $Q$ , given by the HAM-based approach without iteration using the optimal convergence-control parameter  $c_0$  given by the empirical formula (3-106).

$Q$	$c_0$	$w(0)/h$
1	-0.93	0.15
2	-0.76	0.29
3	-0.59	0.41
4	-0.45	0.53
5	-0.34	0.62

### 3.2.1.3 同伦迭代方法给出的结果

由 3.1 节可知, 将迭代技巧引入同伦分析方法可有效提高计算效率。图 3-6 探究了迭代阶数  $M$  对计算效率的影响, 可以发现: 当  $M$  越大, 为达到同样高的计算精度, 虽然所需的迭代次数减少, 但所需的 CPU 时间却增加。因此从计算效率的角度出发, 我们选取  $M = 1$ , 即采取一阶同伦迭代方法。

根据计算, 此时最优的收敛控制参数  $c_0$  满足如下经验公式

$$c_0 = -\frac{23}{Q + 23}, \quad Q \leq 1000. \quad (3-107)$$

表 3-9 给出了取不同  $Q$  值, 使用一阶同伦迭代方法得到的结果。

### 3.2.1.4 证明内插迭代法为一阶同伦迭代方法的一个特例

本节我们将证明: 内插迭代法 [59] 实际上是 3.2.1.1 节中给出的一阶同伦迭代方法的一个特例。

我们取  $c_1 = -\theta$  (这里  $\theta$  为内插迭代法 [59] 中的内插迭代因子),  $c_2 = -1$ 。根据 (3-99) 和 (3-102), 一阶同伦近似  $\varphi(y)$  和  $S(y)$  满足

$$S^*(y) = S_0(y) + S_1(y) = S_0(y) - \delta_{2,0}(y) = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{\varepsilon^2} G(y, \varepsilon) \varphi_0^2(\varepsilon) d\varepsilon. \quad (3-108)$$

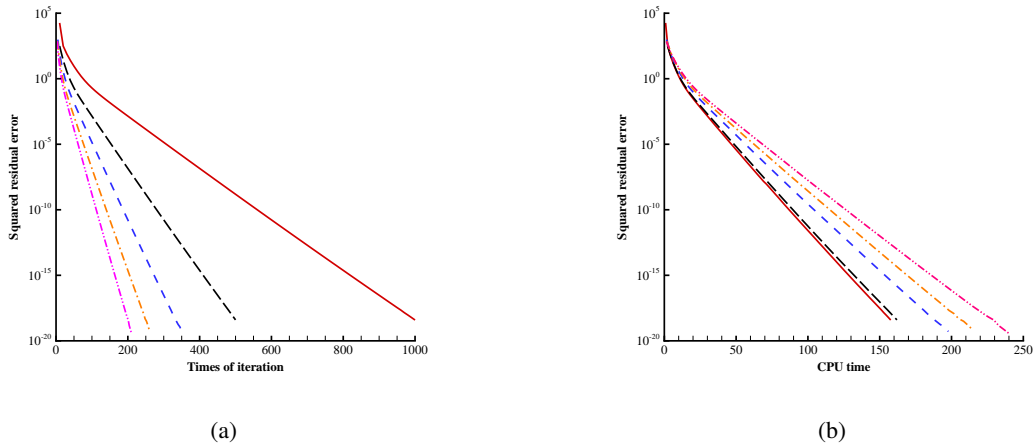


图 3-6 积分形式的大挠度圆薄板方程,  $Q = 1000$ ,  $c_0 = -0.02$ , 使用同伦迭代方法并取不同迭代阶数  $M$  得到的结果。

Fig. 3-6 The squared residual error  $\mathcal{E}$  versus the times of iteration and the CPU times in the case of  $Q = 1000$ , given by the HAM-based iteration approach using the convergence-control parameter  $c_0 = -0.02$ . Solid line: first-order; Long-dashed line: second-order; Dashed line: third-order; Dash-dotted line: fourth-order; Dash-double-dotted line: fifth-order.

表 3-9 积分形式的大挠度圆薄板方程, 给定不同的  $Q$  值, 使用一阶同伦迭代方法得到的结果。

Table 3-9 The homotopy-approximations of  $w(0)/h$  in case of different values of  $Q$ , given by the first-order HAM iteration approach using the optimal convergence-control parameter  $c_0$  given by (3-107).

$Q$	$c_0$	$w(0)/h$
200	-0.10	3.5
400	-0.05	4.5
600	-0.04	5.2
800	-0.03	5.7
1000	-0.02	6.1

$$\begin{aligned} \varphi^*(y) &= \varphi_0(y) + \varphi_1(y) = \varphi_0(y) - \theta \delta_{1,0}(y) \\ &= (1 - \theta)\varphi_0(y) - \theta \int_0^1 K(y, \varepsilon) Q d\varepsilon - \theta \int_0^1 \frac{1}{\varepsilon^2} K(y, \varepsilon) \varphi_0(\varepsilon) S_0(\varepsilon) d\varepsilon, \end{aligned} \tag{3-109}$$

由于在同伦分析方法框架中，我们有极大的自由选取初始猜测解，因此我们采取如下迭代步骤：

- (A) 根据方程 (3-108) 计算  $S^*(y)$ ;
- (B) 让  $S^*(y)$  取代  $S_0(y)$ ，并作为新的初始猜测解，即  $S_0(y) = S^*(y)$ ;
- (C) 根据方程 (3-109) 计算  $\varphi^*(y)$ ;
- (D) 让  $\varphi^*(y)$  取代  $\varphi_0(y)$ ，并作为新的初始猜测解，即  $\varphi_0(y) = \varphi^*(y)$ .

在重复上述迭代步骤  $n$  次之后，我们令

$$\hat{\Phi}_n(y) = \varphi^*(y), \quad \hat{\Xi}_{n-1}(y) = S^*(y).$$

则一阶同伦迭代方法的计算步骤为

$$\begin{cases} \hat{\Xi}_{n-1}(y) = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{\varepsilon^2} G(y, \varepsilon) \hat{\Phi}_{n-1}^2(\varepsilon) d\varepsilon, \\ \hat{\Phi}_n(y) = (1 - \theta) \hat{\Phi}_{n-1}(y) - \theta \int_0^1 K(y, \varepsilon) Q d\varepsilon \\ \quad - \theta \int_0^1 \frac{1}{\varepsilon^2} K(y, \varepsilon) \hat{\Phi}_{n-1}(\varepsilon) \hat{\Xi}_{n-1}(\varepsilon) d\varepsilon. \end{cases} \quad (3-110)$$

此时我们取初始猜测解

$$\hat{\Phi}_0(y) = -\frac{Q\theta}{2} [(\lambda + 1)y - y^2]. \quad (3-111)$$

则一阶同伦迭代方法的计算步骤 (3-110) 和 (3-111) 与内插迭代法 [59] 的计算步骤 (1-37), (1-38) 完全一致。因此，内插迭代法 [59] 仅为一阶同伦迭代方法在  $c_1 = -\theta$ ,  $c_2 = -1$  时的一个特例。而郑晓静和周又和 [60] 又曾证明：对于任意大给定均布外载荷，内插迭代法 [59] 均能给出收敛的结果。因此，这也间接证明了：同伦分析方法对于任意大均布外载荷均能给出收敛的结果（至少在  $c_1 = -\theta$ ,  $c_2 = -1$  时成立）。

### 3.2.2 给定中心挠度

由3.1节可知，将均布外载荷  $Q$  展开成中心挠度的级数可有效加快收敛速度。因此本节进一步考虑给定中心挠度的冯卡门板方程之积分形式。

## 3.2.2.1 同伦分析方法求解步骤

我们构造如下零阶形变方程

$$(1-q) \left[ \tilde{\Phi}(y, q) - \varphi_0(y) \right] = c_1 q \left[ \tilde{\Phi}(y, q) + \int_0^1 \frac{1}{\varepsilon^2} K(y, \varepsilon) \tilde{\Phi}(\varepsilon, q) \tilde{\Xi}(\varepsilon, q) d\varepsilon + \int_0^1 K(y, \varepsilon) \tilde{\Theta}(q) d\varepsilon \right], \quad (3-112)$$

$$(1-q) \left[ \tilde{\Xi}(y, q) - S_0(y) \right] = c_2 q \left[ \tilde{\Xi}(y, q) - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{\varepsilon^2} G(y, \varepsilon) \tilde{\Phi}^2(\varepsilon, q) d\varepsilon \right], \quad (3-113)$$

并满足限制条件

$$\int_0^1 \frac{1}{\varepsilon} \tilde{\Phi}(\varepsilon, q) d\varepsilon = -a. \quad (3-114)$$

这里  $\tilde{\Phi}(y, q)$ 、 $\tilde{\Xi}(y, q)$  和  $\tilde{\Theta}(q)$  分别对应于待求函数  $\varphi(y)$ 、 $S(y)$  和  $Q$ ； $a$  代表中心挠度，定义请见 3.1.1 节。相应的第  $k$  阶形变方程为

$$\begin{aligned} & \varphi_k(y) - \chi_k \varphi_{k-1}(y) \\ &= c_1 \left[ \varphi_{k-1}(y) + \int_0^1 \frac{1}{\varepsilon^2} K(y, \varepsilon) \sum_{i=0}^{k-1} \varphi_i(\varepsilon) S_{k-1-i}(\varepsilon) d\varepsilon \right. \\ & \left. + \int_0^1 K(y, \varepsilon) Q_{k-1} d\varepsilon \right], \end{aligned} \quad (3-115)$$

$$\begin{aligned} & S_k(y) - \chi_k S_{k-1}(y) \\ &= c_2 \left[ S_{k-1}(y) - \int_0^1 \frac{1}{2\varepsilon^2} G(y, \varepsilon) \sum_{i=0}^{k-1} \varphi_i(\varepsilon) \varphi_{k-1-i}(\varepsilon) d\varepsilon \right], \end{aligned} \quad (3-116)$$

并满足限制条件

$$\int_0^1 \frac{1}{\varepsilon} \varphi_k(\varepsilon) d\varepsilon = 0, \quad (3-117)$$

这里， $\varphi_k(y)$ 、 $S_k(y)$  和  $Q_k$  定义与 3.1.1 节相同。

我们取如下初始猜测解

$$\varphi_0(y) = \frac{-2a}{2\lambda + 1} \left[ (\lambda + 1)y - y^2 \right], \quad S_0(y) = 0, \quad (3-118)$$

并为简便起见，令

$$c_1 = c_2 = c_0. \quad (3-119)$$



## 3.2.2.2 同伦非迭代方法给出的结果

类似于3.2.1节，我们同样先采用同伦非迭代方法，并考虑工况  $a = 5$  ( $w(0)/h = 3.0$ )。此时最优的收敛控制参数  $c_0 = -0.25$ ，相应结果如表 3-10所示。可以发现误差  $\mathcal{E}$  在第 100 阶时已降至  $4 \times 10^{-7}$ ，这说明当  $a = 5$  时，同伦非迭代方法依然可以给出收敛的结果。然而钱伟长法 [55]（使用  $a$  作为摄动变量）仅对  $w(0)/h < 2.44$  ( $a < 4$ ) 有效，这再一次说明了同伦分析方法的优越性。

表 3-10 积分形式的大挠度圆薄板方程， $a = 5$ ，使用非迭代同伦分析方法得到的结果。  
Table 3-10 The squared residual error  $\mathcal{E}$  and the approximations of  $Q$  in the case of  $a = 5$  for a circular plate with clamped boundary, given by the HAM without iteration using  $c_0 = -0.25$ .

$k$ , order of approx.	$\mathcal{E}$	$Q$
20	$3 \times 10^{-2}$	132.3
40	$2 \times 10^{-3}$	132.5
60	$9 \times 10^{-5}$	132.3
80	$1 \times 10^{-6}$	132.2
100	$4 \times 10^{-7}$	132.2

根据计算，对于不同给定的  $a$  值，最优的收敛控制参数  $c_0$  满足如下经验公式

$$c_0 = -\frac{11}{11 + a^2} \quad (0 < a \leq 5). \quad (3-120)$$

表3-11给出了取不同  $a$  值，使用非迭代同伦分析方法得到的结果。

## 3.2.2.3 同伦迭代方法给出的结果

从上述众多算例不难发现一阶同伦迭代方法的计算效率最高，因此本节我们直接采用一阶同伦迭代方法。表 3-12给出了  $a = 5$  时的计算结果，可以发现误差  $\mathcal{E}$  在迭代第 40 次时就已降至  $5 \times 10^{-23}$ 。图3-8比较了不同计算方法的计算效率。可以发现：对于积分形式的大挠度圆薄板方程，在给定中心挠度情况下使用的一阶同伦迭代方法 ( $c_0 = -0.25$ ) 收敛最快，而内插迭代法收敛最慢。显然，一阶同伦迭代方法优于内插迭代法 [59]。

表 3-11 积分形式的大挠度圆薄板方程, 取不同  $a$  值, 使用非迭代同伦分析方法得到的结果。

Table 3-11 The results of the uniform pressure  $Q$  in case of different values of  $a$  for a circular plate with clamped boundary, given by the HAM approach without iteration using the optimal  $c_0$  given by (3-120).

$a$	$c_0$	$Q$
1	-0.92	4.8
2	-0.73	14.6
3	-0.55	35.2
4	-0.41	72.4
5	-0.31	132.2

表 3-12 积分形式的大挠度圆薄板方程,  $a = 5$ ,  $c_0 = -0.5$ , 使用一阶同伦迭代方法得到的结果。

Table 3-12 The squared residual error  $\mathcal{E}$  and the approximations of  $Q$  versus the iteration times in the case of  $a = 5$  for a circular plate with clamped boundary, given by the first-order HAM iteration approach using  $c_0 = -0.5$ .

$m$ , times of iteration.	$\mathcal{E}$	$Q$
10	$7 \times 10^{-5}$	132.2
20	$2 \times 10^{-10}$	132.2
30	$1 \times 10^{-18}$	132.2
40	$5 \times 10^{-23}$	132.2

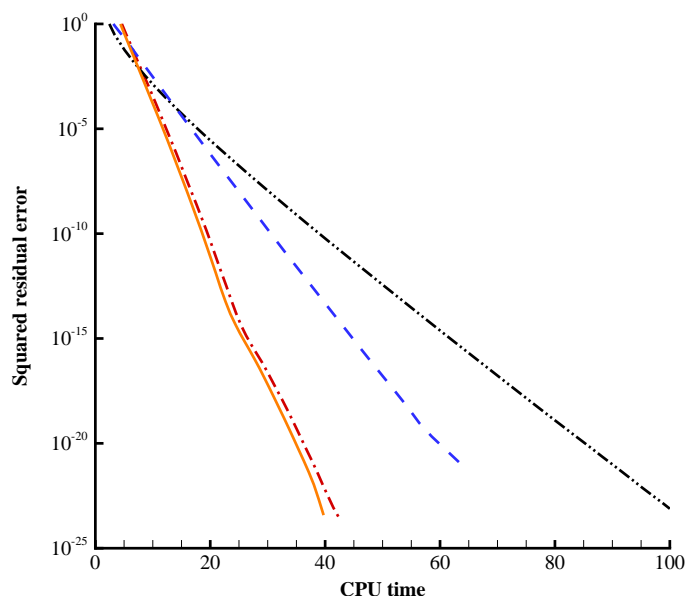


图 3-7 大挠度圆薄板方程，在固定夹紧边界条件下， $Q = 1000$ ，比较内插迭代法 ( $\theta = 0.02$ ) 和一阶同伦迭代方法 (积分形式方程，给定载荷， $c_0 = -0.05$ ；积分形式，给定中心挠度， $c_0 = -0.25$ ；微分形式，给定中心挠度， $c_0 = -0.25$ ) 的计算效率。

Fig. 3-7 The squared residual error  $\mathcal{E}$  versus the CPU time in the case of  $Q = 1000$  (corresponding to  $w(0)/h = 6.1$ ), given by the interpolation iterative method [59], and the HAM-based approach for given external uniform pressure  $Q$  and central deflection  $a$ , respectively. Dash-double-dotted line: results given by the interpolation iterative method [59] using the interpolation parameter  $\theta = 0.02$ ; Dashed line: results given by the first-order HAM iteration approach for given external uniform pressure  $Q$  using  $c_0 = -0.05$ ; Dash-dotted line: results given by the first-order HAM iteration approach [105] for the Von Kármán's plate equations in *differential* form with a given central deflection  $a$  using  $c_0 = -0.25$ . Solid line: results given by the first-order HAM iteration approach for the Von Kármán's plate equations in *integral* form with a given central deflection  $a$  using  $c_0 = -0.25$ .

根据计算，当给定不同的  $a$  值，最优的收敛控制参数满足如下经验公式

$$c_0 = -\frac{25}{25 + a^2}, \quad a < 35 \quad (3-121)$$

表3-13给出了取不同  $a$  值，采用一阶同伦迭代方法得到的结果。此外，图 3-8给出了  $c_0 \sim a$  (3-121) 和  $\theta \sim Q$  [51] 的关系曲线图，发现：随着中心挠度增

加 (方程非线性增强), 内插迭代因子  $\theta$ [59] 比收敛控制因子  $c_0$  (3-121) 更快地趋近于 0。因此不难理解为何一阶同伦迭代方法的收敛速度会远快于内插迭代方法。

表 3-13 积分形式的大挠度圆薄板方程, 取不同  $a$  值, 使用一阶同伦迭代方法得到的结果。  
Table 3-13 The approximations of  $Q$  in case of different values of  $a$  for a circular plate with clamped boundary, given by the first-order HAM iteration approach with the optimal convergence-control parameter  $c_0$  given by (3-121).

$a$	$c_0$	$Q$
5	-0.50	132.2
15	-0.10	3152.1
25	-0.04	14334.1
35	-0.02	39053.6

### 3.2.2.4 证明 3.1.1 节中求解微分形式的同伦分析方法为 3.2.2.1 节中求解积分形式的一个特例

本节我们将证明: 3.1.1 节中求解微分形式的同伦分析方法为 3.2.2.1 节中求解积分形式的一个特例。

改写方程 (3-99), (3-100):

$$\begin{aligned} \varphi_k(y) = & \chi_k \varphi_{k-1}(y) + c_1 \left[ \varphi_{k-1}(y) + Q_{k-1} \left( -\frac{y^2}{2} + \frac{\lambda+1}{2} y \right) + \int_0^y \frac{1}{\varepsilon} \sum_{i=0}^{k-1} \varphi_i(\varepsilon) S_{k-1-i}(\varepsilon) d\varepsilon \right. \\ & \left. + \int_y^1 \frac{y}{\varepsilon^2} \sum_{i=0}^{k-1} \varphi_i(\varepsilon) S_{k-1-i}(\varepsilon) d\varepsilon + (\lambda-1) \int_0^1 \frac{y}{\varepsilon} \sum_{i=0}^{k-1} \varphi_i(\varepsilon) S_{k-1-i}(\varepsilon) d\varepsilon \right], \quad (3-122) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_k(y) = & \chi_k S_{k-1}(y) + c_2 \left[ S_{k-1}(y) - \frac{\mu-1}{2} \int_0^1 \frac{y}{\varepsilon} \sum_{i=0}^{k-1} \varphi_i(\varepsilon) \varphi_{k-1-i}(\varepsilon) d\varepsilon \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} \int_0^y \frac{1}{\varepsilon} \sum_{i=0}^{k-1} \varphi_i(\varepsilon) \varphi_{k-1-i}(\varepsilon) d\varepsilon - \frac{1}{2} \int_y^1 \frac{y}{\varepsilon^2} \sum_{i=0}^{k-1} \varphi_i(\varepsilon) \varphi_{k-1-i}(\varepsilon) d\varepsilon \right], \quad (3-123) \end{aligned}$$

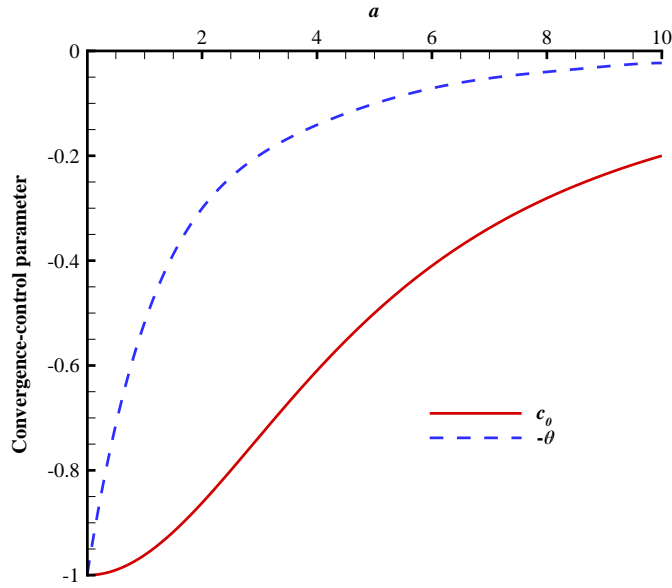


图 3-8 积分形式的大挠度圆薄板方程, 在固定夹紧边界条件下,  $c_0 \sim a$  (3-121) 和  $\theta \sim a$  的关系曲线图 [51]。

Fig. 3-8 The convergence-control parameter  $c_0$  and the interpolation parameter  $\theta$  versus the central deflection  $a$  for a circular plate with clamped boundary, given by the first-order HAM iteration approach for given central deflection  $a$  and the interpolation iterative method [51] for given external uniform pressure  $Q$ . Dashed line:  $-\theta$ ; Solid line:  $c_0$  given by (3-121).

将方程 (3-122), (3-123) 左右两边分别对  $y$  求一次导和两次导, 可得

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi_k(y)}{dy} &= (c_1 + \chi_k) \frac{d\varphi_{k-1}(y)}{dy} + c_1 \left[ (\lambda - 1) \int_0^1 \frac{1}{\varepsilon} \sum_{i=0}^{k-1} \varphi_i(\varepsilon) S_{k-1-i}(\varepsilon) d\varepsilon \right. \\ &\quad \left. + \int_y^1 \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{i=0}^{k-1} \varphi_i(\varepsilon) S_{k-1-i}(\varepsilon) d\varepsilon + Q_{k-1} \left( \frac{\lambda + 1}{2} - y \right) \right], \quad (3-124) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dS_k(y)}{dy} &= (c_2 + \chi_k) \frac{dS_{k-1}(y)}{dy} - \frac{c_2}{2} \left[ (\mu - 1) \int_0^1 \frac{1}{\varepsilon} \sum_{i=0}^{k-1} \varphi_i(\varepsilon) \varphi_{k-1-i}(\varepsilon) d\varepsilon \right. \\ &\quad \left. + \int_y^1 \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{i=0}^{k-1} \varphi_i(\varepsilon) \varphi_{k-1-i}(\varepsilon) d\varepsilon \right], \quad (3-125) \end{aligned}$$

$$\frac{d^2\varphi_k(y)}{dy^2} = (c_1 + \chi_k) \frac{d^2\varphi_{k-1}(y)}{dy^2} - c_1 \left[ \frac{1}{y^2} \sum_{i=0}^{k-1} \varphi_i(y) S_{k-1-i}(y) + Q_{k-1} \right], \quad (3-126)$$

$$\frac{d^2 S_k(y)}{dy^2} = (c_2 + \chi_k) \frac{d^2 S_{k-1}(y)}{dy^2} + c_2 \frac{1}{2y^2} \sum_{i=0}^{k-1} \varphi_i(y) \varphi_{k-1-i}(y). \quad (3-127)$$

我们把  $y = 0$  代入到方程 (3-122) 和 (3-123) 中, 可得

$$\begin{cases} \varphi_k(0) = (c_1 + \chi_k) \varphi_{k-1}(0), \\ S_k(0) = (c_2 + \chi_k) S_{k-1}(0), \end{cases} \quad (3-128)$$

即

$$\begin{cases} \varphi_k(0) = (c_1 + \chi_k) \varphi_{k-1}(0) = \cdots = c_1 (c_1 + 1)^{k-1} \varphi_0(0), \\ S_k(0) = (c_2 + \chi_k) S_{k-1}(0) = \cdots = c_2 (c_2 + 1)^{k-1} S_0(0). \end{cases} \quad (3-129)$$

我们再把  $y = 1$  代入到方程 (3-122)-(3-125) 中, 可得

$$\varphi_k(1) - (c_1 + \chi_k) \varphi_{k-1}(1) = \lambda c_1 \left[ \int_0^1 \frac{1}{\varepsilon} \sum_{i=0}^{k-1} \varphi_i(\varepsilon) S_{k-1-i}(\varepsilon) d\varepsilon + \frac{Q_{k-1}}{2} \right], \quad (3-130)$$

$$\begin{aligned} & \left. \frac{d\varphi_k(y)}{dy} \right|_{y=1} - (c_1 + \chi_k) \left. \frac{d\varphi_{k-1}(y)}{dy} \right|_{y=1} \\ &= (\lambda - 1) c_1 \left[ \int_0^1 \frac{1}{\varepsilon} \sum_{i=0}^{k-1} \varphi_i(\varepsilon) S_{k-1-i}(\varepsilon) d\varepsilon + \frac{Q_{k-1}}{2} \right], \end{aligned} \quad (3-131)$$

$$S_k(1) - (c_2 + \chi_k) S_{k-1}(1) = -\frac{\mu c_2}{2} \int_0^1 \frac{1}{\varepsilon} \sum_{i=0}^{k-1} \varphi_i(\varepsilon) \varphi_{k-1-i}(\varepsilon) d\varepsilon, \quad (3-132)$$

$$\left. \frac{dS_k(y)}{dy} \right|_{y=1} - (c_2 + \chi_k) \left. \frac{dS_{k-1}(y)}{dy} \right|_{y=1} = -\frac{(\mu - 1) c_2}{2} \int_0^1 \frac{1}{\varepsilon} \sum_{i=0}^{k-1} \varphi_i(\varepsilon) \varphi_{k-1-i}(\varepsilon) d\varepsilon. \quad (3-133)$$

不难发现

$$\begin{aligned} & \left[ \varphi_k(y) - \frac{\lambda}{\lambda - 1} \frac{d\varphi_k(y)}{dy} \right] \Big|_{y=1} = (c_1 + \chi_k) \left[ \varphi_{k-1}(y) - \frac{\lambda}{\lambda - 1} \frac{d\varphi_{k-1}(y)}{dy} \right] \Big|_{y=1} \\ &= \cdots = c_1 (c_1 + 1)^{k-1} \left[ \varphi_0(y) - \frac{\lambda}{\lambda - 1} \frac{d\varphi_0(y)}{dy} \right] \Big|_{y=1}, \end{aligned} \quad (3-134)$$

$$\begin{aligned} & \left[ S_k(y) - \frac{\mu}{\mu-1} \frac{dS_k(y)}{dy} \right] \Big|_{y=1} = (c_2 + \chi_k) \left[ S_{k-1}(y) - \frac{\mu}{\mu-1} \frac{dS_{k-1}(y)}{dy} \right] \Big|_{y=1} \\ & = \cdots = c_2(c_2 + 1)^{k-1} \left[ S_0(y) - \frac{\mu}{\mu-1} \frac{dS_0(y)}{dy} \right] \Big|_{y=1}. \end{aligned} \quad (3-135)$$

若我们取  $c_1 = c_2 = c_0$ ，并与 3.1.1 节中相同的初始猜测解  $\varphi_0(y)$  和  $S_0(y)$ ，则

$$\begin{cases} \varphi_0(0) = S_0(0) = 0, & \varphi_0(1) = \frac{\lambda}{\lambda-1} \frac{d\varphi_0(y)}{dy} \Big|_{y=1}, \\ S_0(1) = \frac{\mu}{\mu-1} \frac{dS_0(y)}{dy} \Big|_{y=1}, & \int_0^1 \frac{1}{\varepsilon} \varphi_0(\varepsilon) d\varepsilon = -a, \end{cases} \quad (3-136)$$

由公式 (3-129)、(3-134) 和 (3-135) 可得

$$\begin{cases} \varphi_k(0) = S_k(0) = 0, & \varphi_k(1) = \frac{\lambda}{\lambda-1} \frac{d\varphi_k(y)}{dy} \Big|_{y=1}, \\ S_k(1) = \frac{\mu}{\mu-1} \frac{dS_k(y)}{dy} \Big|_{y=1}. \end{cases} \quad (3-137)$$

注意到，控制方程 (3-126) 和 (3-127)，限制条件 (3-117) 和边界条件 (3-137) 与 3.1.1 节中的完全一致，因此 3.1.1 节中求解微分形式的大挠度圆薄板方程之同伦分析方法仅为 3.2.2.1 节中求解积分形式的同伦分析方法的一个特例，证明完毕。

若我们取  $c_1 \in (-2, 0)$ ， $c_2 \in (-2, 0)$ ，则有

$$1 + \sum_{k=1}^{+\infty} c_n (c_n + 1)^{k-1} = 1 + \frac{c_n}{1 - (c_n + 1)} = 0, \quad n = 1, 2.$$

再根据方程 (3-129)、(3-134) 和 (3-135) 可知

$$\begin{aligned} \varphi(0) &= \varphi_0(0) + \sum_{k=1}^{+\infty} \varphi_k(0) = \varphi_0(0) \left[ 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} c_1 (c_1 + 1)^{k-1} \right] = 0, \\ S(0) &= S_0(0) + \sum_{k=1}^{+\infty} S_k(0) = S_0(0) \left[ 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} c_2 (c_2 + 1)^{k-1} \right] = 0, \end{aligned} \quad (3-138)$$

$$\begin{aligned} & \left[ \varphi(y) - \frac{\lambda}{\lambda-1} \frac{d\varphi(y)}{dy} \right] \Big|_{y=1} = \sum_{k=0}^{+\infty} \left[ \varphi_k(y) - \frac{\lambda}{\lambda-1} \frac{d\varphi_k(y)}{dy} \right] \Big|_{y=1} \\ & = \left[ 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} c_1 (c_1 + 1)^{k-1} \right] \left[ \varphi_0(y) - \frac{\lambda}{\lambda-1} \frac{d\varphi_0(y)}{dy} \right] \Big|_{y=1} = 0, \quad (3-139) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left[ S(y) - \frac{\mu}{\mu-1} \frac{dS(y)}{dy} \right] \Big|_{y=1} = \sum_{k=0}^{+\infty} \left[ S_k(y) - \frac{\mu}{\mu-1} \frac{dS_k(y)}{dy} \right] \Big|_{y=1} \\ & = \left[ 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} c_2 (c_2 + 1)^{k-1} \right] \left[ S_0(y) - \frac{\mu}{\mu-1} \frac{dS_0(y)}{dy} \right] \Big|_{y=1} = 0, \quad (3-140) \end{aligned}$$

因此，若我们选取  $c_1 \in (-2, 0)$ ， $c_2 \in (-2, 0)$ ，则无论我们选取何种初始猜测解，同伦近似解  $\varphi(y)$  和  $S(y)$  均会自动满足冯卡门板方程的边界条件。换句话说：采用同伦分析方法求解积分形式的大挠度圆薄板方程，初始解不必像 3.1.1 节中一样得服从边界条件。

### 3.2.3 小结

本节，我们应用同伦分析方法成功求解任意大均布外载荷作用下的大挠度圆薄板方程之积分形式。此外，我们进一步证明了内插迭代法 [59] 与求解微分形式的同伦分析方法仅为求解积分形式的同伦分析方法的一个特例。由于内插迭代法对于任意大均布外载荷均能给出收敛的结果 [60]，这也间接证明了同伦分析方法的收敛性。注意到，在 3.1 节中，我们又成功证明：摄动法和修正迭代法 [51, 57] 实际上仅为同伦分析方法在  $c_0 = -1$  的一个特例。因此，求解大挠度圆薄板方程的三种传统方法（摄动法，修正迭代法 [51, 57] 和内插迭代法 [59]）均可被统一到同伦分析方法的框架中。



## 第四章 应用同伦分析方法求解后屈曲梁模型

### 4.1 固端/简单支承

#### 4.1.1 同伦分析方法求解步骤

后屈曲梁 [63] 的控制方程为

$$\mathcal{N}[w(x)] = EIw''''(x) - \alpha E [w'(x)]^2 w''(x) + E\lambda w''(x) - f(x) = 0, \quad (4-1)$$

若两端为固端/简单支承, 则服从边界条件

$$w(0) = w(L) = w'(0) = w'(L) = 0; \quad (4-2)$$

这里,  $w(x)$ 、 $\nu$ 、 $E$ 、 $h$ 、 $L$ 、 $p$  和  $q(x)$  分别代表在坐标  $x$  处的横向位移, 泊松比, 杨氏模量, 梁的高度, 梁的长度, 在  $x = L$  处的轴向外压力和梁的横向分布载荷。

由于有限范围内的连续函数  $w(x)$  常常能被幂级数很好地表达, 因此我们选取如下基函数作为解表达

$$w(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k x^k, \quad (4-3)$$

这里  $a_k$  为常系数。

我们构造如下零阶形变方程

$$(1 - q)\mathcal{L}[\Psi(x, q) - \psi_0(x)] = c_0 q \mathcal{N}[\Psi(x, q)], \quad (4-4)$$

并服从边界条件

$$\Psi(0, q) = \Psi'(0, q) = \Psi(1, q) = \Psi'(1, q) = 0, \quad (4-5)$$

其中, 非线性算子  $\mathcal{N}$  由 (4-1) 定义;  $\psi_0(x)$  为  $\Psi(x)$  的初始猜测解, 且满足边界条件 (4-2);  $\mathcal{L}$  为一个辅助线性算子;  $c_0$  为一个非零常数; 嵌入变量  $q \in [0, 1]$ 。

当  $q = 0$  时, 由  $\mathcal{L}(0) = 0$ , 可知方程 (4-4) 和 (4-5) 有解

$$\Psi(x, 0) = \psi_0(x). \quad (4-6)$$

当  $q = 1$  时, 若假定

$$\Psi(x, 1) = w(x). \quad (4-7)$$

则方程 (4-4) 和 (4-5) 等价于原始方程 (4-1) 和 (4-2)。因此, 随着嵌入变量  $q$  从 0 逐渐增加到 1,  $\Psi(x, q)$  从已知的初始猜测解  $\psi_0(x)$  连续变化到待求函数  $w(x)$ 。

利用 (4-6), 我们可将  $\Psi(x, q)$  展开成如下麦克劳林级数

$$\Psi(x, q) = \psi_0(x) + \sum_{k=1}^{+\infty} \psi_k(x) q^k, \quad (4-8)$$

这里,

$$\psi_k(x) = \mathcal{D}_k \left\{ \Psi(x, q) \right\}, \quad (4-9)$$

其中  $\mathcal{D}_k$  定义请见 (2-20)。在同伦分析方法的框架中, 我们假定若选取合适的辅助线性算子  $\mathcal{L}$  和收敛控制参数  $c_0$ , 使得同伦级数 (4-8) 在  $q = 1$  处收敛。则根据 (4-7), 可知同伦近似解为

$$w(x) = \psi_0(x) + \sum_{k=1}^{+\infty} \psi_k(x). \quad (4-10)$$

把级数 (4-8) 代入到零阶形变方程 (4-4) 和 (4-5) 中, 并令方程左右两边  $q^k$  前系数相等, 可以得到如下  $k$  阶形变方程

$$\mathcal{L}[\psi_k(x) - \chi_k \psi_{k-1}(x)] = c_0 \delta_{k-1}(x), \quad (4-11)$$

服从边界条件

$$\psi_k(0) = \psi'_k(0) = \psi_k(1) = \psi''_k(1) = 0, \quad (4-12)$$

这里,

$$\begin{aligned} \delta_{k-1}(x) &= \mathcal{D}_{k-1} \left\{ \mathcal{N}[\Psi(x, q)] \right\} \\ &= EI \psi_{k-1}''''(x) - \alpha E \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{j=0}^i \psi'_{k-1-i}(x) \psi'_{i-j}(x) \psi''_j(x) \\ &\quad + E \lambda \psi_{k-1}''(x) - (1 - \chi_k) f(x). \end{aligned} \quad (4-13)$$

其中  $\chi_k$  定义请见 (2-24)。

由于控制方程 (4-1) 为一个四阶常微分方程, 我们选取一个四阶的线性算子

$$\mathcal{L}[u(x)] = \frac{du^4(x)}{dx^4}. \quad (4-14)$$

则 (4-11)-(4-13) 的通解为

$$\begin{aligned} \psi_k(x) = & \chi_k \psi_{k-1}(x) + \int_0^x \int_0^\zeta \int_0^\tau \int_0^\eta c_0 \delta_k(\varepsilon) d\varepsilon d\eta d\tau d\zeta \\ & + d_{1,k} + d_{2,k}x + d_{3,k}x^2 + d_{4,k}x^3, \end{aligned} \quad (4-15)$$

这里, 未知常系数  $d_{1,k}$ 、 $d_{2,k}$ 、 $d_{3,k}$  和  $d_{4,k}$  可由四个边界条件 (4-12) 唯一确定。

注意到, 当大挠度弹性梁处于后屈曲状态时, (4-1) 和 (4-2) 可能存在三支解 [106]。而根据经验, 对于一个多解问题, 我们往往可通过选取不同的初始猜测解来捕捉所有的解。因此, 我们选取如下初始猜测解

$$\psi_0(x) = 4\sigma(3x^2 - 5x^3 + 2x^4), \quad (4-16)$$

这里,  $\sigma$  一个为未知常数。当根据 (4-15) 和 (4-16) 依次求出  $\psi_1(x)$ ,  $\psi_2(x)$ ,  $\dots$  后,  $w(x)$  的  $n$  阶同伦级数解为

$$\tilde{\Psi}_n(x) = \sum_{k=0}^n \psi_k(x). \quad (4-17)$$

为了刻画全局误差来加以描述计算精度, 我们定义

$$\mathcal{E} = \int_0^1 \left\{ \mathcal{N}[\tilde{\Psi}_n(x)] \right\}^2 dx, \quad (4-18)$$

这里, 非线性算子  $\mathcal{N}$  由 (4-1) 定义。

#### 4.1.2 结果

不失一般性, 我们考虑工况  $f(x) = 0.1$ ,  $\lambda = 0.022$ , 并取收敛控制参数  $c_0 = -1$ 。此时, 多解控制参数  $\sigma$  为待定参数。

$\mathcal{E} \sim \sigma$  的关系曲线如图 4-1 所示, 可以发现: 图中存在三个区域  $\Omega_1$ ,  $\Omega_2$  和  $\Omega_3$ , 对于任意的  $\sigma \in \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3$ , 随着阶数  $n$  的增加, 误差  $\mathcal{E}$  会随之减少。

这说明方程 (4-1) 和 (4-2) 应该存在三支解——第一支解靠近  $\sigma = -0.1$ ，第二支解靠近  $\sigma = 0$ ，第三支解靠近  $\sigma = 0.1$ 。

在第十五阶同伦近似，我们使用符号软件 Mathematica 中的命令 `Minimize` 来求误差  $\mathcal{E}$  在三个区域  $\sigma \in [-0.12, -0.07]$ ， $\sigma \in [-0.01, 0.01]$ ， $\sigma \in [0.07, 0.12]$  中的极小值点，分别得到  $\sigma = -0.09458721$ ， $\sigma = -0.0012316452$ ， $\sigma = 0.09537517$ 。利用这三个最优的多解参数  $\sigma$ ，可轻易得到后屈曲梁模型 (4-1) 的三支解，具体结果如表 4-1-4-3 所示。高扬曾指出，该具有非凸能量的后屈曲梁模型 (4-1) 用普通的数值方法很难求解 [106]。然而在同伦分析方法框架中，我们通过选取合适的初始猜测解，即可轻松求出所有的解，这验证了同伦分析方法对多解问题的有效性。

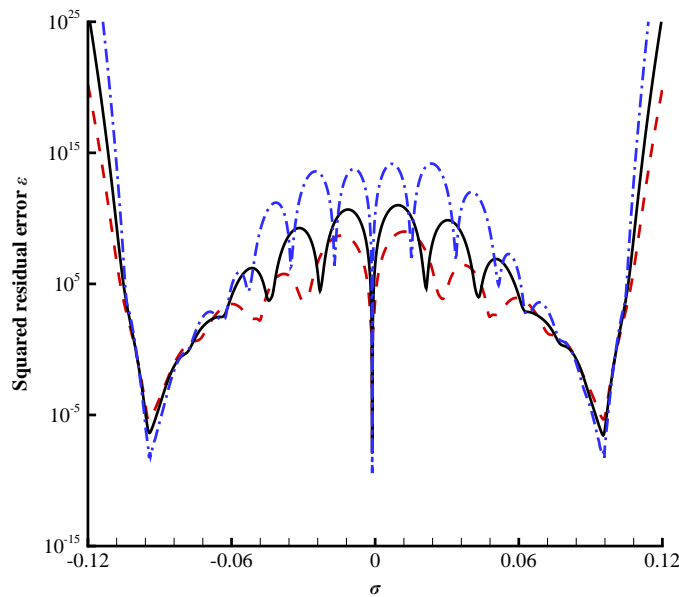


图 4-1 大挠度后屈曲梁，固端/简支边界， $f = 0.1$ ， $\lambda = 0.022$ ， $c_0 = -1$ ， $\mathcal{E} \sim \sigma$  的关系曲线图。

Fig. 4-1 The squared residual error  $\mathcal{E}$  versus the multiple-solution-control parameter  $\sigma$  for the elastic beam with clamped/simply supported boundary, in the case of  $f = 0.1$  and  $\lambda = 0.022$ , given by the HAM using  $c_0 = -1$ . Dashed line: tenth-order approximation; solid line: twelfth-order approximation; dash-dotted line: fifteenth-order approximation.

表 4-1 大挠度后屈曲梁, 固端/简支边界,  $f = 0.1$ ,  $\lambda = 0.022$ ,  $c_0 = -1$ ,  $\sigma = -0.09458721$ , 使用同伦分析方法求出的第一支解。

Table 4-1 Results for the elastic beam with clamped/simply supported boundary, in the case of  $f = 0.1$  and  $\lambda = 0.022$ , given by the HAM using the convergence-control parameter  $c_0 = -1$  and the multiple-solution-parameter  $\sigma = -0.09458721$ .

$n$ , order of approx.	$\mathcal{E}$	$w(1/2)$
5	$6.8 \times 10^{-3}$	-0.1003568
10	$3.6 \times 10^{-6}$	-0.1004079
15	$8.8 \times 10^{-9}$	-0.1004085
20	$1.8 \times 10^{-11}$	-0.1004086
25	$1.5 \times 10^{-13}$	-0.1004086
30	$6.4 \times 10^{-16}$	-0.1004086

表 4-2 大挠度后屈曲梁, 固端/简支边界,  $f = 0.1$ ,  $\lambda = 0.022$ ,  $c_0 = -1$ ,  $\sigma = -0.0012316452$ , 使用同伦分析方法求出的第二支解。

Table 4-2 Results for the elastic beam with clamped/simply supported boundary, in the case of  $f = 0.1$  and  $\lambda = 0.022$ , given by the HAM using the convergence-control parameter  $c_0 = -1$  and the multiple-solution-parameter  $\sigma = -0.0012316452$ .

$n$ , order of approx.	$\mathcal{E}$	$w(1/2)$
3	$6.0 \times 10^{-4}$	-0.001112
6	$1.6 \times 10^{-5}$	-0.001092
9	$4.5 \times 10^{-7}$	-0.001089
12	$1.3 \times 10^{-8}$	-0.001088
15	$4.5 \times 10^{-10}$	-0.001088

表 4-3 大挠度后屈曲梁, 固端/简支边界,  $f = 0.1$ ,  $\lambda = 0.022$ ,  $c_0 = -1$ ,  $\sigma = 0.09537517$ , 使用同伦分析方法求出的第三支解。

Table 4-3 Results for the elastic beam with clamped/simply supported boundary, in the case of  $f = 0.1$  and  $\lambda = 0.022$ , given by the HAM using the convergence-control parameter  $c_0 = -1$  and the multiple-solution-parameter  $\sigma = 0.09537517$ .

$n$ , order of approx.	$\mathcal{E}$	$w(1/2)$
5	$6.7 \times 10^{-3}$	0.1018248
10	$4.6 \times 10^{-6}$	0.1018831
15	$2.5 \times 10^{-9}$	0.1018841
20	$2.3 \times 10^{-11}$	0.1018842
25	$6.5 \times 10^{-15}$	0.1018842
30	$4.0 \times 10^{-16}$	0.1018842

## 4.2 两端简单支承

### 4.2.1 同伦分析方法求解步骤

两端简单支承的后屈曲梁 [63] 的控制方程为

$$\mathcal{N}[w(x)] = EIw''''(x) - \alpha E [w'(x)]^2 w''(x) + E\lambda w''(x) - f(x) = 0, \quad (4-19)$$

服从边界条件

$$w(0) = w(L) = w''(0) = w''(L) = 0. \quad (4-20)$$

类似于 4.1.1 节, 我们构造如下零阶形变方程

$$(1 - q)\mathcal{L}[\Psi(x, q) - \psi_0(x)] = c_0 q \mathcal{N}[\Psi(x, q)], \quad (4-21)$$

服从边界条件

$$\Psi(0, q) = \Psi(1, q) = \Psi''(0, q) = \Psi''(1, q) = 0, \quad (4-22)$$

非线性算子  $\mathcal{N}$  由 (4-19) 定义。则相应的  $k$  阶形变方程为

$$\mathcal{L}[\psi_k(x) - \chi_k \psi_{k-1}(x)] = c_0 \delta_{k-1}(x), \quad (4-23)$$

服从边界条件

$$\psi_k(0) = \psi_k(1) = \psi_k''(0) = \psi_k''(1) = 0, \quad (4-24)$$

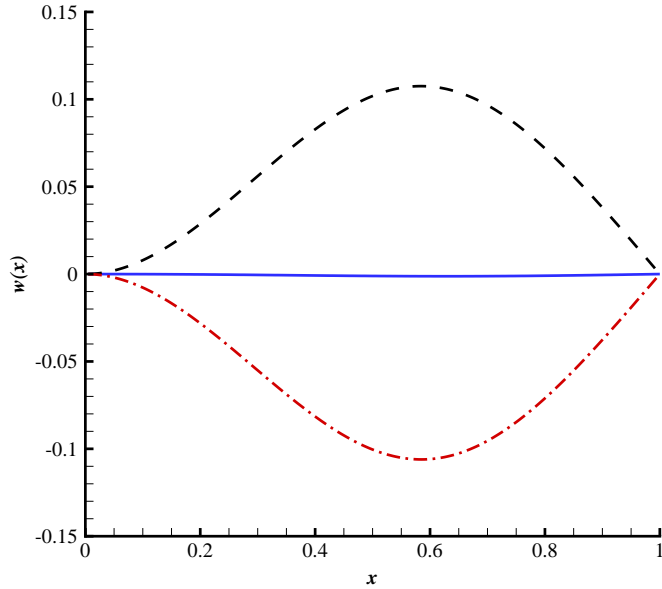


图 4-2 固端/简支边界条件下的大挠度后屈曲梁之挠度曲线。

Fig. 4-2 Solutions of the elastic beam with clamped/simply supported boundary, in the case of  $f = 0.1$  and  $\lambda = 0.022$ . Dashed-dotted line: given by the HAM using  $\sigma = -0.09458721$ ; solid line: given by the HAM using  $\sigma = -0.0012316452$ ; dashed line: given by the HAM using  $\sigma = 0.09537517$ .

这里  $\delta_{k-1}(x)$  由 (4-13) 定义。我们仍然取 (4-14) 中定义的线性算子  $\mathcal{L}$ 。除此之外，为了满足边界条件 (4-20)，我们取如下初始猜测解

$$\psi_0(x) = \frac{16}{5}\sigma(x - 2x^3 + x^4). \quad (4-25)$$

#### 4.2.2 结果

不失一般性，我们考虑工况： $f(x) = 0.1$ ， $\lambda = 0.015$ 。同样得，我们仍然先考虑  $c_0 = -1$ 。 $\mathcal{E} \sim \sigma$  的关系曲线如图 4-3 所示，可以发现：图中仍然存在三个与 4.1.2 节中相似的区域  $\Omega_1$ ， $\Omega_2$  和  $\Omega_3$ ，这预示着方程 (4-19) 和 (4-20) 也应该存在三支解：第一支解靠近  $\sigma = -0.11$ ，第二支解靠近  $\sigma = 0$ ，第三支解靠近  $\sigma = 0.11$ 。

我们仍然利用符号软件 Mathematica 的 Minimize 命令，在三个区域  $\sigma \in$

$[-0.12, -0.09]$ ,  $\sigma \in [-0.01, 0.01]$  和  $\sigma \in [0.09, 0.12]$  中分别寻求最优的  $\sigma$  值 (对应于最小的误差  $\mathcal{E}$ ), 可得  $\sigma = -0.107466372011$ ,  $\sigma = -0.001526491604$ ,  $\sigma = 0.109132498856$ 。表4-4给出了第一支解的结果, 可以发现, 计算至第十阶即可得到非常精确的结果, 此时全局误差  $\mathcal{E} = \epsilon_1 \times \infty^{-\infty \nabla}$ 。然而如图4-4所示, 此时若我们采用相同的策略来求第二支解和第三支解, 却无法得到收敛的结果。幸运的是, 在同伦分析方法框架中, 除了可以调控多解控制参数  $\sigma$ , 我们还可以选取合适的收敛控制参数  $c_0$  来确保级数解收敛。我们把  $\sigma$  和  $c_0$  同时看成未知参数, 并用 `Minimize`命令分别在  $\sigma \in [-0.12, -0.09]$  和  $\sigma \in [0.09, 0.12]$  两个区域中搜寻  $\mathcal{E}$  的极小值, 得到:  $c_0 = -0.752184, \sigma = -0.107147$  和  $c_0 = -0.730866, \sigma = 0.108758$ 。利用该结果, 可获得收敛的第二支解和第三支解, 具体结果如表4-5和4-6所示。

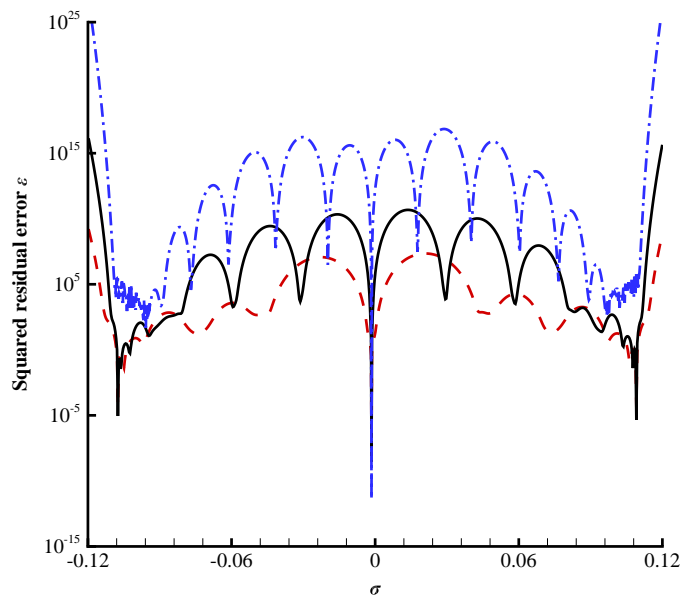


图 4-3 两端简单支承的大挠度后屈曲梁,  $f = 0.1$ ,  $\lambda = 0.015$ ,  $c_0 = -1$ ,  $\mathcal{E} \sim \sigma$  的关系曲线图。

Fig. 4-3 The squared residual error  $\mathcal{E}$  versus the multiple-solution-control parameter  $\sigma$  for the elastic beam with simply supported boundary, in the case of  $f = 0.1$  and  $\lambda = 0.015$ , given by the HAM using  $c_0 = -1$ . Dashed line: fifth-order approximation; solid line: seventh-order approximation; dash-dotted line: tenth-order approximation.



表 4-4 两端简单支承的大挠度后屈曲梁,  $f = 0.1$ ,  $\lambda = 0.015$ ,  $c_0 = -1$ ,  $\sigma = -0.001526491604$ , 使用同伦分析方法求出的第一支解。

Table 4-4 Results for the elastic beam with simply supported boundary, in the case of  $f = 0.1$  and  $\lambda = 0.015$ , given by the HAM using the convergence-control parameter  $c_0 = -1$  and the multiple-solution-parameter  $\sigma = -0.001526491604$ .

$n$ , order of approx.	$\mathcal{E}$	$w(1/2)$
2	$9.3 \times 10^{-6}$	-0.00154151
4	$3.8 \times 10^{-8}$	-0.00154252
6	$1.6 \times 10^{-10}$	-0.00154259
8	$6.4 \times 10^{-13}$	-0.00154259
10	$2.7 \times 10^{-15}$	-0.00154259

表 4-5 两端简单支承的大挠度后屈曲梁,  $f = 0.1$ ,  $\lambda = 0.015$ ,  $c_0 = -1$ ,  $\sigma = -0.001526491604$ , 使用同伦分析方法求出的第二支解。

Table 4-5 Results for the elastic beam with simply supported boundary, in the case of  $f = 0.1$  and  $\lambda = 0.015$ , given by the HAM using the convergence-control parameter  $c_0 = -0.752184$  and the multiple-solution-parameter  $\sigma = -0.107147$ .

$n$ , order of approx.	$\mathcal{E}$	$w(1/2)$
10	$1.3 \times 10^{-8}$	-0.11537807
20	$4.8 \times 10^{-11}$	-0.11537786
30	$1.3 \times 10^{-13}$	-0.11537789
40	$2.8 \times 10^{-16}$	-0.11537789
50	$3.8 \times 10^{-19}$	-0.11537789

### 4.3 总结

本章, 我们采用同伦分析方法成功求解了一个带有非凸能量的大挠度后屈曲梁模型。高扬曾指出: “该梁模型 (4-1) 共有三支解, 且解十分敏感, 因此大部分数值方法无法求出所有的解, 目前仅有三对偶方法能给出精确的结果。” 然而在同伦分析方法框架中, 我们通过符号软件 Mathematica 的 Minimize 命

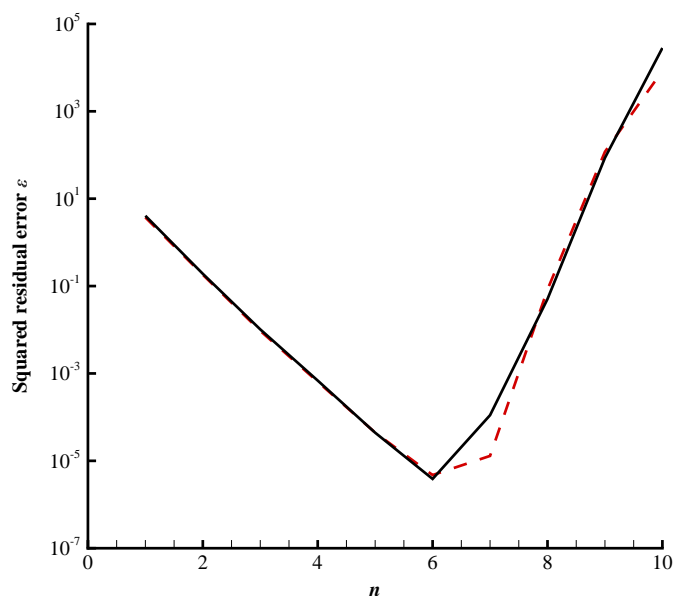


图 4-4 两端简单支承的大挠度后屈曲梁,  $f = 0.1$ ,  $\lambda = 0.015$ ,  $c_0 = -1$ , 不同阶数的  $\mathcal{E}$  曲线图。实线:  $\sigma = 0.109132498856$ ; 虚线:  $\sigma = -0.107466372011$ 。

Fig. 4-4 The squared residual error  $\mathcal{E}$  versus the order of approximation  $n$  for the elastic beam with simply supported boundary, in the case of  $f = 0.1$  and  $\lambda = 0.015$ , given by the HAM using  $c_0 = -1$ . Dashed line:  $\sigma = -0.107466372011$ ; solid line:  $\sigma = 0.109132498856$ .

令来选取合适的收敛控制参数和初始猜测解, 即可轻松求出所有的解。该方法简便易行, 这也进一步证实了同伦分析方法对于多解敏感问题的有效性。

表 4-6 两端简单支承的大挠度后屈曲梁,  $f = 0.1$ ,  $\lambda = 0.015$ ,  $c_0 = -1$ ,  $\sigma = -0.001526491604$ , 使用同伦分析方法求出的第三支解。

Table 4-6 Results for the elastic beam with simply supported boundary, in the case of  $f = 0.1$  and  $\lambda = 0.015$ , given by the HAM using the convergence-control parameter  $c_0 = -0.730866$  and the multiple-solution-parameter  $\sigma = 0.108758$ .

$n$ , order of approx.	$\mathcal{E}$	$w(1/2)$
10	$3.0 \times 10^{-8}$	0.11698722
20	$8.8 \times 10^{-10}$	0.11698663
30	$8.1 \times 10^{-12}$	0.11698675
40	$3.8 \times 10^{-14}$	0.11698674
50	$2.3 \times 10^{-16}$	0.11698674
60	$1.2 \times 10^{-18}$	0.11698674



## 第五章 应用同伦分析方法求解倒向型/正倒向型随机微分方程

倒向型/正倒向型随机微分方程是当前金融数学中的一个热点问题。尤其是在期货投资领域，正向随机微分方程的解将今天的确定状态（初始条件）变为未来的不确定的状态以研究其统计规律，而倒向型随机微分方程的解则是将将来的（也可是不确定的）目标变为当今的明确的解从而来帮助制定当前的决策。因此，如何精确求解倒向型/正倒向型随机微分方程具有重要理论和实际意义。然而虽然正向随机微分方程的理论研究历史已有数百年，但倒向型随机微分方程却仅在近几十年才受到人们关注。彭实戈 [107] 认为该局面主要是由两点因素造成：(1) 正向随机微分方程与倒向型随机微分方程的结构具有本质区别，因此人们很难从正向随机微分方程出发猜想出倒向随机微分方程的形式。(2) 从认识论的角度来看，正向随机微分方程考察的是如何认识客观存在的随机过程，然而倒向型随机微分方程关心得是如何在有随机干扰的环境中达到预期的目标。

正倒向型随机微分方程的一般形式为

$$\begin{cases} dx_t = b(t, x_t, y_t, z_t)dt + \sigma(t, x_t, y_t, z_t)dW_t, \\ -dy_t = f(t, x_t, y_t, z_t)dt - z_t dW_t, & 0 \leq t \leq T, \\ x_0 = \epsilon, \quad y_T = \xi, \end{cases} \quad (5-1)$$

这里， $W_t$  是一个  $r$  维布朗变量； $\epsilon \in \mathcal{F}_0$ ； $\xi \in \mathcal{F}_T$ ； $b: \Omega \times [0, T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{m \times r} \rightarrow \mathbb{R}^d$ ； $\sigma: \Omega \times [0, T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{m \times r} \rightarrow \mathbb{R}^{d \times r}$ ； $f: \Omega \times [0, T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{m \times r} \rightarrow \mathbb{R}^m$ ； $x_t \in \mathbb{R}^d$ ； $y_t \in \mathbb{R}^m$  和  $z_t \in \mathbb{R}^{m \times r}$  为待求变量。依据广义 Feynman-Kac 公式 [66, 71]，方程 (5-1) 的解  $(y_t, z_t)$  满足如下关系

$$y_t = u(t, x_t), \quad z_t = (\nabla_x u \sigma)(t, x_t), \quad (5-2)$$

这里  $u(t, x)$  是如下偏微分方程的经典解

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{i=1}^d b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d [\sigma \sigma^*]_{ij} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + f(t, x, u, \nabla_x u \sigma) = 0, \quad (5-3)$$

服从边界条件

$$u(T, x) = \xi. \quad (5-4)$$

耦合的二阶正倒向型随机微分方程的一般形式为

$$\begin{cases} dx_t = b(t, \Theta_t)dt + \sigma(t, \Theta_t)dW_t, \\ -dy_t = f(t, \Theta_t)dt - z_t dW_t, \\ dz_t = A_t dt + \Gamma_t dW_t, \quad 0 \leq t \leq T, \\ x_0 = \epsilon, \quad y_T = \xi, \end{cases} \quad (5-5)$$

这里:  $\Theta_t = (x_t, y_t, z_t, A_t, \Gamma_t) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \times \mathcal{S}^d$  为待求变量;  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  是一个给定的概率空间;  $W_t$  是一个  $d$  维的布朗变量;  $\mathcal{S}^d$  代表  $d \times d$  实矩阵集;  $b: \Omega \times [0, T] \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \times \mathcal{S}^d \rightarrow \mathbb{R}^m$ ;  $\sigma: \Omega \times [0, T] \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \times \mathcal{S}^d \rightarrow \mathbb{R}^{m \times d}$ ;  $f: \Omega \times [0, T] \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \times \mathcal{S}^d \rightarrow \mathbb{R}$ 。在某些假定前提下 [74, 75], 方程组 (5-5) 的解  $(y_t, z_t, A_t, \Gamma_t)$  满足以下关系

$$\begin{cases} y_t = u(t, x_t), \quad z_t = (\nabla_x u \sigma)(t, x_t), \\ \Gamma_t = (\nabla_x (\nabla_x u \sigma) \sigma)(t, x_t), \quad A_t = \left( \tilde{\mathcal{L}}(\nabla_x u \sigma) \right)(t, x_t), \end{cases} \quad (5-6)$$

这里:  $\tilde{\mathcal{L}}$  为一个二阶椭圆微分算子

$$\tilde{\mathcal{L}}\phi = \frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla_x \phi(t, x)b(t, x) + \frac{1}{2} \text{tr}(\sigma(t, x)\sigma^*(t, x)\nabla_x^2 \phi), \quad (5-7)$$

$\nabla_x^2 \phi$  为一个 Hessian 矩阵 [77], 即:  $\nabla_x \phi = (\partial_{x_1} \phi, \dots, \partial_{x_m} \phi)$ 。

本章, 我们先采用同伦分析方法求解三种不同类型的倒向型随机微分方程 (BSDE), 然后再利用同伦分析方法分别求解 (1 维和高维) 正倒向型随机微分方程 (FBSDE) 和二阶正倒向型随机微分方程 (2FBSDE), 以此来阐述同伦分析方法对于该问题的有效性和在金融领域中的巨大潜力。

## 5.1 求解倒向型随机微分方程

根据方程 (5-1)-(5-4), 如果我们让  $x_t$  为标准布朗运动 (即  $b = 0, \sigma = 1$ ), 则与倒向型随机微分方程相关联的偏微分方程为

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + f(t, u, \nabla_x u) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (5-8)$$

服从边界条件

$$u(T, x) = \xi, \quad (5-9)$$

这里  $d$  表示维度。且倒向型随机微分方程的解满足如下关系式

$$y_t = u(t, W_t), \quad z_t = \nabla_x u(t, W_t). \quad (5-10)$$

### 5.1.1 一维倒向型随机微分方程

这里, 我们先考虑一维的倒向型随机微分方程 ( $y_t, W_t$  均为一维)

$$\begin{cases} -dy_t = (-y_t^3 + 2.5y_t^2 - 1.5y_t)dt - z_t dW_t, & 0 \leq t \leq T, \\ y_T = \frac{\exp(W_T + T)}{\exp(W_T + T) + 1}, \end{cases} \quad (5-11)$$

其精确解为

$$y_t = \frac{\exp(W_t + t)}{\exp(W_t + t) + 1}, \quad z_t = \frac{\exp(W_t + t)}{(\exp(W_t + t) + 1)^2}. \quad (5-12)$$

不失一般性, 我们取  $T = 1$ 。由于  $W_0 = 0$  (初始时刻无随机干扰), 所以初始时刻的精确解为:  $y_0 = 1/2, z_0 = 1/4$ 。根据公式 (5-8)-(5-10), 相应的偏微分方程为

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u^3 + \frac{5}{2} u^2 - \frac{3}{2} u = 0, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad (5-13)$$

服从边界条件

$$u(1, x) = \frac{e^{x+1}}{e^{x+1} + 1}. \quad (5-14)$$

我们引入变换

$$\theta = \frac{e^{x+1}}{e^{x+1} + 1}. \quad (5-15)$$

则  $\theta \in (0, 1)$ , 且

$$y_t = u(t, \theta), \quad z_t = \theta(1 - \theta) \frac{\partial u(t, \theta)}{\partial \theta}. \quad (5-16)$$

方程 (5-13) 和 (5-14) 转化为

$$\begin{aligned} \mathcal{N}[u] &= \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\theta}{2} (1 - \theta)(1 - 2\theta) \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{1}{2} \theta^2 (1 - \theta)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} - u^3 \\ &+ \frac{5}{2} u^2 - \frac{3}{2} u = 0, \end{aligned} \quad (5-17)$$

服从边界条件

$$u(t, \theta) \Big|_{t=1} = \theta, \quad (5-18)$$

其精确解为

$$u(t, \theta) = \frac{\theta e^t}{\theta e^t + (1 - \theta)e}. \quad (5-19)$$

这里,  $\mathcal{N}$  表征一个非线性算子。接下来, 我们将采用同伦分析方法对方程 (5-17) 和 (5-18) 进行求解。

鉴于  $t \in [0, 1]$  为一个有限区域, 我们采取幂函数作为基函数, 即

$$u(t, \theta) = \sum_{m=0}^{+\infty} a_m(\theta) \cdot t^m, \quad (5-20)$$

这里:  $a_m(\theta)$  为待求系数。

不妨让  $\varphi_0(t, \theta)$  表征待求函数  $u(t, \theta)$  的初始猜测解, 且满足边界条件 (5-18);  $\mathcal{L}$  是一个辅助的线性算子, 满足  $\mathcal{L}[0] = 0$ ;  $c_0$  为一个未知常数, 我们称之为“收敛控制参数”;  $q \in [0, 1]$  为一个嵌入变量。我们构造如下一组微分方程

$$(1 - q)\mathcal{L}[\Phi(t, \theta, q) - \varphi_0(t, \theta)] = c_0 q \mathcal{N}[\Phi(t, \theta, q)], \quad (5-21)$$

服从边界条件

$$\Phi(t, \theta, q) \Big|_{t=1} = \theta, \quad (5-22)$$

这里: 非线性算子  $\mathcal{N}$  由 (5-17) 定义,  $\Phi(t, \theta, q)$  对应的是待求函数  $u(t, \theta)$ 。

当  $q = 0$  时, 由  $\mathcal{L}[0] = 0$  可知, 方程 (5-21) 和 (5-22) 有解

$$\Phi(t, \theta, 0) = \varphi_0(t, \theta). \quad (5-23)$$

当  $q = 1$  时, 若假定

$$\Phi(t, \theta, 1) = u(t, \theta). \quad (5-24)$$

则方程 (5-21) 和 (5-22) 等价于原始方程 (5-17) 和 (5-18)。因此, 当嵌入变量  $q$  从 0 逐渐增大至 1,  $\Phi(t, \theta, q)$  将从给定的初始猜测解  $\varphi_0(t, \theta)$  连续变化至待求函数  $u(t, \theta)$ , 因此我们称方程 (5-21) 和 (5-22) 为零阶形变方程。



利用 (5-23),  $\Phi(t, \theta, q)$  可展开成如下麦克劳林级数

$$\Phi(t, \theta, q) = \sum_{m=0}^{+\infty} \varphi_m(t, \theta) \cdot q^m, \quad (5-25)$$

这里

$$\varphi_m(t, \theta) = \mathcal{D}_m [\Phi(t, \theta, q)], \quad (5-26)$$

其中

$$\mathcal{D}_m[f] = \frac{1}{m!} \frac{\partial^m f}{\partial q^m} \Big|_{q=0}. \quad (5-27)$$

通常说来, 幂级数的收敛半径是有限的。但由于在同伦分析方法框架中, 我们有极大的自由选取线性算子  $\mathcal{L}$  和非零的收敛控制参数  $c_0$ , 这给我们提供了一种简单的方式来控制级数的收敛性。我们先假定通过选取合适的线性算子  $\mathcal{L}$  和非零的收敛控制参数  $c_0$ , 使得幂级数 (5-25) 在  $q = 1$  处收敛。则由公式 (5-24) 可知, 同伦近似解

$$u(t, \theta) = \sum_{m=0}^{+\infty} \varphi_m(t, \theta). \quad (5-28)$$

将幂级数 (5-25) 代入到零阶形变方程 (5-21) 和 (5-22) 中, 并令方程左右两边  $q^m$  系数相等, 可得如下  $m$  阶形变方程

$$\mathcal{L}[\varphi_m - \chi_m \varphi_{m-1}] = c_0 \delta_{m-1}(t, \theta), \quad (5-29)$$

服从边界条件

$$\varphi_m(t, \theta) \Big|_{t=1} = 0, \quad (5-30)$$

其中,

$$\begin{aligned} \delta_n(t, \theta) &= \mathcal{D}_n \left\{ \mathcal{N}[\Phi(t, \theta, q)] \right\} \\ &= \frac{\partial \varphi_n}{\partial t} + \frac{1}{2} \theta (1 - \theta) (1 - 2\theta) \frac{\partial \varphi_n}{\partial \theta} + \frac{1}{2} \theta^2 (1 - \theta)^2 \frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial \theta^2} \\ &\quad - \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{n-i} \varphi_i \varphi_j \varphi_{n-i-j} + \frac{5}{2} \sum_{i=0}^n \varphi_i \varphi_{n-i} - \frac{3}{2} \varphi_n, \end{aligned} \quad (5-31)$$

且

$$\chi_m = \begin{cases} 0, & m \leq 1, \\ 1, & m > 1. \end{cases} \quad (5-32)$$

这里  $\mathcal{D}_n$  由 (5-27) 定义。同时, 为了满足边界条件 (5-18), 我们选取

$$\varphi_0(t, \theta) = \theta \quad (5-33)$$

作为  $u(t, \theta)$  的初始猜测解, 并选取如下辅助线性算子

$$\mathcal{L}[\varphi] = \frac{\partial \varphi}{\partial t}. \quad (5-34)$$

注意到,  $m$  阶形变方程为一阶线性方程, 且仅有一个边界条件, 因此该方程仅有唯一解。 $m$  阶形变方程的通解为

$$\varphi_m(t, \theta) = \chi_m \varphi_{m-1}(t, \theta) + c_0 \int_1^t \delta_{m-1}(z, \theta) dz, \quad (5-35)$$

待求函数  $u(t, \theta)$  的  $M$  阶同伦级数解为

$$\tilde{\varphi}_M(t, \theta) = \sum_{m=0}^M \varphi_m(t, \theta), \quad (5-36)$$

若求出  $\tilde{\varphi}_M(t, \theta)$ , 相应的初始值  $y_0, z_0$  即可得到

$$\tilde{y}_0 = \tilde{\varphi}_M(0, \theta) \Big|_{\theta=\frac{c}{c+1}}, \quad \tilde{z}_0 = \left[ \theta(1-\theta) \frac{\partial \tilde{\varphi}_M(0, \theta)}{\partial \theta} \right] \Big|_{\theta=\frac{c}{c+1}}.$$

由于该问题的精确解已知, 因此我们定义如下函数来刻画求出的同伦级数解与精确解之间的误差

$$\tilde{\mathcal{E}} = \int_0^1 \int_0^1 \left[ \tilde{\varphi}_M(t, \theta) - u(t, \theta) \right]^2 d\theta dt. \quad (5-37)$$

除此之外, 在精确解未知情况下, 我们也可定义如下全局误差

$$\mathcal{E} = \int_0^1 \int_0^1 \left\{ \mathcal{N}[\tilde{\varphi}_M(t, \theta)] \right\}^2 d\theta dt, \quad (5-38)$$

这里非线性算子  $\mathcal{N}$  由 (5-17) 定义。显然,  $\mathcal{E}$  或  $\tilde{\mathcal{E}}$  越小, 则说明求出的同伦级数解越精确。

误差  $\mathcal{E} \sim c_0$  曲线如图5-1所示。可以发现任给  $c_0 \in [-1.4, -0.4]$ , 误差  $\mathcal{E}$  均会随着阶数的增加而减少, 这也意味着同伦级数的收敛区域为  $c_0 \in$

$[-1.4, -0.4]$ , 但最优的收敛控制参数  $c_0$  (即最小的误差  $\mathcal{E}$ ) 在  $-1$  附近。因此, 为简便起见, 我们取  $c_0 = -1$ 。相应的同伦近似解为

$$\begin{cases} \tilde{\varphi}_1(t, \theta) = t\theta + \theta^2 - t\theta^2; \\ \tilde{\varphi}_2(t, \theta) = \frac{1}{2}\theta + \frac{1}{2}t^2\theta - \frac{1}{2}\theta^2 + 2t\theta^2 - \frac{3}{2}t^2\theta^2 + \theta^3 - 2t\theta^3 + t^2\theta^3; \\ \tilde{\varphi}_3(t, \theta) = \frac{1}{3}\theta + \frac{1}{2}t\theta + \frac{1}{6}t^3\theta + \frac{2}{3}\theta^2 - \frac{3}{2}t\theta^2 + 2t^2\theta^2 - \frac{7}{6}t^3\theta^2 \\ \quad - \theta^3 + 4t\theta^3 - 5t^2\theta^3 + 2t^3\theta^3 + \theta^4 - 3t\theta^4 + 3t^2\theta^4 - t^3\theta^4; \\ \dots \end{cases} \quad (5-39)$$

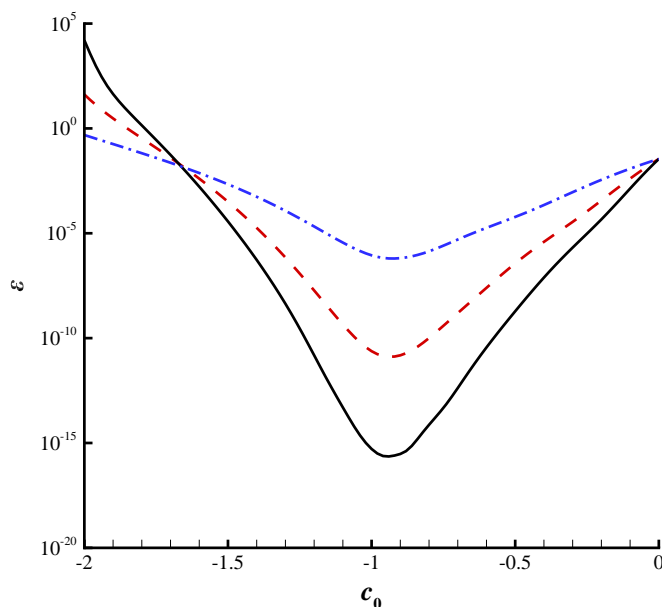


图 5-1 一维倒向型随机微分方程,  $\mathcal{E} \sim c_0$  曲线图。点虚线: 5 阶同伦近似; 虚线: 10 阶同伦近似; 实线: 15 阶同伦近似。

Fig. 5-1 The squared residual error versus  $c_0$  of Eq. (5-21). Dash-dotted line: 5th-order approximation; Dashed line: 10th-order approximation; Solid line: 15th-order approximation.

表 5-1 给出了使用同伦分析方法在不同阶数时得到的结果, 可以发现仅需  $2.2s^1$  就可得到精确的结果 (此时同伦级数解与精确解的误差为  $10^{-9}$  量级)。除

<sup>1</sup>本节所有算例均在 i7 3.60GHz 处理器和 8GB 内存的手提电脑上运行

此之外，图5-2比较了  $t = 0, 0.25, 0.5, 0.75$  时的同伦级数解与精确解，可以发现同伦级数解与精确解吻合很好。这些均证实了同伦分析方法对于倒向型随机微分方程的有效性。

表 5-1 一维倒向型随机微分方程，同伦分析方法在不同阶数时求出的结果。

Table 5-1 The squared residual error, the used CPU time (second) and the relative error between the homotopy approximations  $\tilde{y}_0, \tilde{z}_0$  and the exact solutions  $y_0, z_0$  of Eq. (5-11), respectively. Here,  $m$  denotes the order of approximation.

$m$	$\tilde{\mathcal{E}}$	$\tilde{y}_0 - y_0$	$\tilde{z}_0 - z_0$	time (s)
3	$1 \times 10^{-6}$	$-5 \times 10^{-3}$	$-8 \times 10^{-4}$	0.1
6	$8 \times 10^{-10}$	$8 \times 10^{-5}$	$2 \times 10^{-4}$	0.2
9	$5 \times 10^{-13}$	$3 \times 10^{-7}$	$-1 \times 10^{-5}$	0.4
12	$4 \times 10^{-16}$	$-8 \times 10^{-8}$	$5 \times 10^{-7}$	1.0
15	$6 \times 10^{-19}$	$3 \times 10^{-9}$	$-8 \times 10^{-9}$	2.2

### 5.1.2 带有 2 维 $y_t$ 的倒向型随机微分方程

本小节，我们考虑一个带有 2 维  $y_t$  的倒向型随机微分方程

$$\begin{cases} - \begin{pmatrix} dy_t^{(1)} \\ dy_t^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left[ \frac{1}{2}y_t^{(1)} - y_t^{(2)} \right] \left[ \left( y_t^{(1)} \right)^2 + \left( y_t^{(2)} \right)^2 \right] \\ \left[ y_t^{(1)} + \frac{1}{2}y_t^{(2)} \right] \left[ \left( y_t^{(1)} \right)^2 + \left( y_t^{(2)} \right)^2 \right] \end{pmatrix} dt - \begin{pmatrix} z_t^{(1)} \\ z_t^{(2)} \end{pmatrix} dW_t, \\ y_T = \begin{bmatrix} y_T^{(1)} \\ y_T^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin(W_T + T) \\ \cos(W_T + T) \end{bmatrix}, \end{cases} \quad (5-40)$$

其精确解为

$$y_t = \begin{bmatrix} y_t^{(1)} \\ y_t^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin(W_t + t) \\ \cos(W_t + t) \end{bmatrix}, \quad z_t = \begin{bmatrix} z_t^{(1)} \\ z_t^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(W_t + t) \\ -\sin(W_t + t) \end{bmatrix}. \quad (5-41)$$

在初始时刻，有  $y_0 = [y_0^{(1)}, y_0^{(2)}]^* = [0, 1]^*$ ,  $z_0 = [z_0^{(1)}, z_0^{(2)}]^* = [1, 0]^*$ 。同样得，不失一般性，我们令  $T = 1$ 。根据公式 (5-8)-(5-10)，相应的偏微分方程为

$$\begin{cases} \mathcal{N}_1[u_1, u_2] = \frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \left( \frac{1}{2}u_1 - u_2 \right) (u_1^2 + u_2^2) = 0, \\ \mathcal{N}_2[u_1, u_2] = \frac{\partial u_2}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \left( u_1 + \frac{1}{2}u_2 \right) (u_1^2 + u_2^2) = 0, \end{cases} \quad (5-42)$$

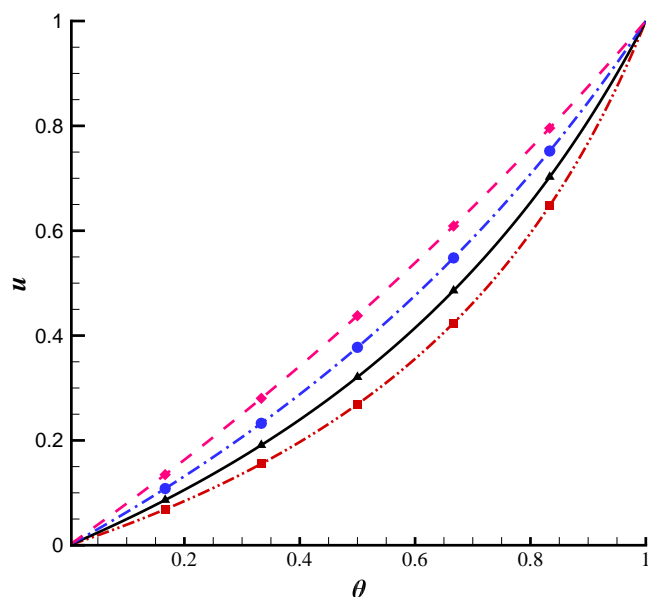


图 5-2 一维倒向型随机微分方程，比较  $t = 0, 0.25, 0.5, 0.75$  时的同伦级数解与精确解。双点虚线： $t = 0$  时的同伦近似解；实线： $t = 0.25$  时的同伦近似解；点虚线： $t = 0.5$  时的同伦近似解；虚线： $t = 0.75$  时的同伦近似解；正方形： $t = 0$  时的精确解；上三角形： $t = 0.25$  时的精确解；圆形： $t = 0.5$  时的精确解；菱形： $t = 0.75$  时的精确解。

Fig. 5-2 Comparison between the homotopy approximations and the exact solution  $u$  of Eqs. (5-17) and (5-18) when  $t = 0, 0.25, 0.5, 0.75$ . Dash-double-dotted line: homotopy approximation at  $t = 0$ ; Solid line: homotopy approximation at  $t = 0.25$ ; Dashed-dotted line: homotopy approximation at  $t = 0.5$ ; Dashed line: homotopy approximation at  $t = 0.75$ . Square: exact solution at  $t = 0$ ; Triangle up: exact solution at  $t = 0.25$ ; Circle: exact solution at  $t = 0.5$ ; Diamond: exact solution at  $t = 0.75$ .

服从边界条件

$$u_1(1, x) = \sin(x + 1), \quad u_2(1, x) = \cos(x + 1), \quad (5-43)$$

其精确解为

$$u_1(t, x) = \sin(x + t), \quad u_2(t, x) = \cos(x + t). \quad (5-44)$$

这里：非线性算子  $\mathcal{N}_1$  和  $\mathcal{N}_2$  由 (5-42) 定义。

在同伦分析方法框架中，我们构造如下零阶形变方程

$$\begin{cases} (1-q)\frac{\partial}{\partial t}[\Phi(t,x,q) - \varphi_0(t,x)] = c_0 q \mathcal{N}_1[\Phi(t,x,q), \Xi(t,x,q)], \\ (1-q)\frac{\partial}{\partial t}[\Xi(t,x,q) - S_0(t,x)] = c_0 q \mathcal{N}_2[\Phi(t,x,q), \Xi(t,x,q)], \end{cases} \quad (5-45)$$

服从边界条件

$$\Phi(t,x,q)\Big|_{t=1} = \sin(x+1), \quad \Xi(t,x,q)\Big|_{t=1} = \cos(x+1), \quad (5-46)$$

这里  $\varphi_0$  和  $S_0$  分别为  $u_1$  和  $u_2$  的初始猜测解。显然，

$$\Phi(t,x,1) = u_1(t,x), \quad \Xi(t,x,1) = u_2(t,x). \quad (5-47)$$

因此，当嵌入变量  $q$  从 0 连续变化至 1 时， $\Phi(t,x,q)$  从给定的初始猜测解  $\varphi_0(t,x)$  连续变化至待求函数  $u_1(t,x)$ ， $\Xi(t,x,q)$  从  $S_0(t,x)$  连续变化至  $u_2(t,x)$ 。

同样得，我们将  $\Phi(t,x,q)$  和  $\Xi(t,x,q)$  展开成关于  $q$  的幂级数

$$\Phi(t,x,q) = \sum_{m=0}^{+\infty} \varphi_m(t,x) \cdot q^m, \quad \Xi(t,x,q) = \sum_{m=0}^{+\infty} S_m(t,x) \cdot q^m. \quad (5-48)$$

并将 (5-48) 代入到方程 (5-45) 和 (5-46) 中，然后让方程左右两边  $q^m$  系数相等，可得高阶形变方程

$$\frac{\partial}{\partial t}(\varphi_m - \chi_m \varphi_{m-1}) = c_0 \delta_{1,m-1}, \quad (5-49)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(S_m - \chi_m S_{m-1}) = c_0 \delta_{2,m-1}, \quad (5-50)$$

服从边界条件

$$\varphi_m(t,x)\Big|_{t=1} = 0, \quad S_m(t,x)\Big|_{t=1} = 0, \quad (5-51)$$

其中

$$\begin{aligned}\delta_{1,n}(t, x) &= \mathcal{D}_n \left( \mathcal{N}_1 \left[ \Phi(t, x, q), \Xi(t, x, q) \right] \right) \\ &= \frac{\partial \varphi_n}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial x^2} \\ &\quad + \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{n-i} \left( \frac{1}{2} \varphi_i - S_i \right) \left( \varphi_j \varphi_{n-i-j} + S_j S_{n-i-j} \right),\end{aligned}\quad (5-52)$$

$$\begin{aligned}\delta_{2,n}(t, x) &= \mathcal{D}_n \left( \mathcal{N}_2 \left[ \Phi(t, x, q), \Xi(t, x, q) \right] \right) \\ &= \frac{\partial S_n}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 S_n}{\partial x^2} \\ &\quad + \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{n-i} \left( \varphi_i + \frac{1}{2} S_i \right) \left( \varphi_j \varphi_{n-i-j} + S_j S_{n-i-j} \right),\end{aligned}\quad (5-53)$$

为了满足边界条件 (5-43), 我们选取如下的初始猜测解

$$\varphi_0(t, x) = \sin(x+1), \quad S_0(t, x) = \cos(x+1). \quad (5-54)$$

则高阶形变方程 (5-49) - (5-51) 的通解为

$$\varphi_m(t, x) = \chi_m \varphi_{m-1}(t, x) + c_0 \int_1^t \delta_{1,m-1}(t, x) dt, \quad (5-55)$$

$$S_m(t, x) = \chi_m S_{m-1}(t, x) + c_0 \int_1^t \delta_{2,m-1}(t, x) dt, \quad (5-56)$$

当利用  $\varphi_0(t, x)$ ,  $S_0(t, x)$  依次求出  $\varphi_1(t, x)$ ,  $S_1(t, x)$ ,  $\varphi_2(t, x)$ ,  $S_2(t, x)$ ,  $\dots$  后,  $u_1(t, x)$  和  $u_2(t, x)$  的  $M$  阶同伦近似解为

$$\tilde{\varphi}_M(t, x) = \sum_{m=0}^M \varphi_m(t, x), \quad \tilde{S}_M(t, x) = \sum_{m=0}^M S_m(t, x), \quad (5-57)$$

在初始时刻  $t = 0$  时, 有

$$\begin{aligned}\tilde{y}_1 &= \tilde{\varphi}_M(0, x) \Big|_{x=0}, & \tilde{y}_2 &= \tilde{S}_M(0, x) \Big|_{x=0}, \\ \tilde{z}_1 &= \frac{\partial \tilde{\varphi}_M(0, x)}{\partial x} \Big|_{x=0}, & \tilde{z}_2 &= \frac{\partial \tilde{S}_M(0, x)}{\partial x} \Big|_{x=0},\end{aligned}$$

同样地, 我们定义如下两个误差

$$\begin{cases} \tilde{\mathcal{E}} = \int_0^T \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ (\tilde{\varphi}_M - u_1)^2 + (\tilde{S}_M - u_2)^2 \right] dx dt, \\ \mathcal{E} = \int_0^T \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \left( \mathcal{N}_1[\tilde{\varphi}_M, \tilde{S}_M] \right)^2 + \left( \mathcal{N}_2[\tilde{\varphi}_M, \tilde{S}_M] \right)^2 \right\} dx dt. \end{cases} \quad (5-58)$$

通过计算, 同伦级数解的收敛域为  $c_0 \in [-1.3, -0.4]$ , 但最优的  $c_0$  (对应于最小的误差  $\mathcal{E}$ ) 仍然在  $-1$  附近。因此, 我们选取  $c_0 = -1$ , 相应的同伦近似解为

$$\begin{cases} \tilde{\varphi}_1(t, x) = (t-1) \cos(1+x) + \sin(1+x); \\ \tilde{S}_1(t, x) = (1-t) \sin(1+x) + \cos(1+x); \\ \tilde{\varphi}_2(t, x) = (t-1) \cos(1+x) - \frac{1}{2}(t^2 - 2t - 1) \sin(1+x); \\ \tilde{S}_2(t, x) = (1-t) \sin(1+x) - \frac{1}{2}(t^2 - 2t - 1) \cos(1+x); \\ \tilde{\varphi}_3(t, x) = -\frac{1}{6}(t^3 - 3t^2 - 3t + 5) \cos(1+x) - \frac{1}{2}(t^2 - 2t - 1) \sin(1+x); \\ \tilde{S}_3(t, x) = \frac{1}{6}(t^3 - 3t^2 - 3t + 5) \sin(1+x) - \frac{1}{2}(t^2 - 2t - 1) \cos(1+x); \\ \dots \end{cases}$$

表5-2给出了同伦分析方法在不同阶数时的结果, 可以发现同伦级数解与精确解之间的误差仅需 6.9s, 就降至  $10^{-20}$  量级。因此, 同伦分析方法对于该类倒向型随机微分方程 (2 维  $y_t$ ) 依然有效。图5-3比较了  $t = 0, 0.25, 0.5, 0.75$  时的同伦级数解与精确解, 可以发现同伦级数解与精确解吻合非常好。

### 5.1.3 带有 2 维布朗变量的倒向型随机微分方程

本小节, 我们考虑如下带有 2 维布朗变量的倒向型随机微分方程

$$\begin{cases} -dy_t = \left( y_t - \frac{1}{2}z_t^{(1)} - \frac{1}{2}z_t^{(2)} \right) dt - z_t^{(1)} dW_t^{(1)} - z_t^{(2)} dW_t^{(2)}, \quad 0 \leq t \leq T, \\ y_T = \sin \left( W_T^{(1)} + W_T^{(2)} + T \right), \end{cases} \quad (5-59)$$

其精确解为

$$\begin{cases} y_t = \sin \left( W_t^{(1)} + W_t^{(2)} + t \right), \\ z_t^{(1)} = \cos \left( W_t^{(1)} + W_t^{(2)} + t \right), \\ z_t^{(2)} = \cos \left( W_t^{(1)} + W_t^{(2)} + t \right). \end{cases} \quad (5-60)$$



表 5-2 带有 2 维  $y_t$  的倒向型随机微分方程, 使用同伦分析方法在不同阶数时得到的结果。  
 Table 5-2 The squared residual error, the used CPU time (second) and the relative error between the homotopy approximations  $\tilde{y}_1, \tilde{y}_2$  and the exact solutions  $y_0^{(1)}, y_0^{(2)}$  of Eq. (5-40), respectively. Here,  $m$  denotes the order of approximation.

$m$	$\tilde{\mathcal{E}}$	$\tilde{y}_1 - y_0^{(1)}$	$\tilde{y}_2 - y_0^{(2)}$	time (s)
4	$8 \times 10^{-6}$	$6 \times 10^{-3}$	$-6 \times 10^{-3}$	0.2
8	$6 \times 10^{-13}$	$2 \times 10^{-6}$	$-2 \times 10^{-6}$	0.7
12	$2 \times 10^{-21}$	$1 \times 10^{-10}$	$-1 \times 10^{-10}$	1.7
16	$5 \times 10^{-31}$	$2 \times 10^{-15}$	$-2 \times 10^{-15}$	3.5
20	$2 \times 10^{-41}$	$1 \times 10^{-20}$	$-2 \times 10^{-20}$	6.9

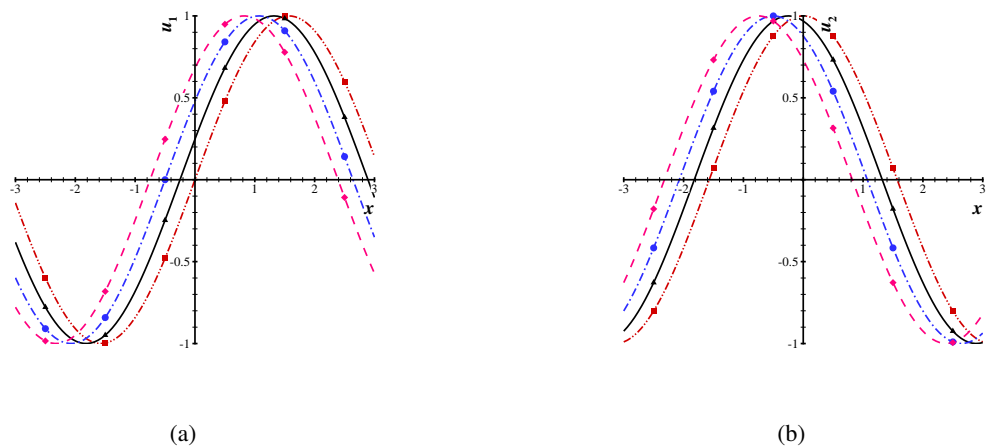


图 5-3 带有 2 维  $y_t$  的倒向型随机微分方程, 比较  $t = 0, 0.25, 0.5, 0.75$  时的同伦级数解与精确解。双点虚线： $t = 0$  时的同伦近似解；实线： $t = 0.25$  时的同伦近似解；点虚线： $t = 0.5$  时的同伦近似解；虚线： $t = 0.75$  时的同伦近似解；正方形： $t = 0$  时的精确解；上三角形： $t = 0.25$  时的精确解；圆形： $t = 0.5$  时的精确解；菱形： $t = 0.75$  时的精确解。  
 Fig. 5-3 Comparison between the homotopy approximations and the exact solutions  $u_1$  (left),  $u_2$  (right) of Eqs. (5-42) and (5-43), respectively, at  $t = 0, 0.25, 0.5, 0.75$ . Dash-double-dotted line: homotopy approximations at  $t = 0$ ; Solid line: homotopy approximations at  $t = 0.25$ ; Dashed-dotted line: homotopy approximations at  $t = 0.5$ ; Dashed line: homotopy approximations at  $t = 0.75$ . Square: the exact solution at  $t = 0$ ; Triangle up: the exact solution at  $t = 0.25$ ; Circle: the exact solution at  $t = 0.5$ ; Diamond: the exact solution at  $t = 0.75$ .

在初始时刻, 精确解为:  $y_0 = 0, z_0^{(1)} = 1, z_0^{(2)} = 1$ 。不失一般性, 我们令  $T = 1$ 。同样根据方程 (5-8)-(5-10), 可得相应的偏微分方程为

$$\mathcal{N}_3[u] = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + u - \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial x_1} - \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial x_2} = 0, \quad (5-61)$$

服从边界条件

$$u(1, x_1, x_2) = \sin(x_1 + x_2 + 1). \quad (5-62)$$

这里非线性算子  $\mathcal{N}_3$  由 (5-61) 定义。

我们构造如下零阶形变方程

$$(1 - q) \frac{\partial}{\partial t} [\Phi(t, x_1, x_2, q) - \varphi_0(t, x_1, x_2)] = c_0 q \mathcal{N}_3 [\Phi(t, x_1, x_2, q)], \quad (5-63)$$

服从边界条件

$$\Phi(t, x_1, x_2, q) \Big|_{t=1} = \sin(x_1 + x_2 + 1), \quad (5-64)$$

这里  $\varphi_0$  为  $u(t, x_1, x_2)$  的初始猜测解, 且  $\varphi_0$  满足边界条件 (5-62)。

与前两小节类似,  $u(t, x_1, x_2)$  的  $M$  阶同伦近似为

$$\tilde{\varphi}_M(t, x_1, x_2) = \sum_{m=0}^M \varphi_m(t, x_1, x_2), \quad (5-65)$$

$\varphi_m$  由如下高阶形变方程求出

$$\frac{\partial}{\partial t} (\varphi_m - \chi_m \varphi_{m-1}) = c_0 \delta_{3,m-1}, \quad (5-66)$$

且服从边界条件

$$\varphi_m(t, x_1, x_2) \Big|_{t=1} = 0, \quad (5-67)$$

其中,

$$\begin{aligned} \delta_{3,k}(t, x_1, x_2) &= \mathcal{D}_k \left( \mathcal{N}_3 [\Phi(t, x_1, x_2, q)] \right) \\ &= \frac{\partial \varphi_k}{\partial t} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial x_2^2} \right) + \varphi_k - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_1} + \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_2} \right), \end{aligned} \quad (5-68)$$

为了满足边界条件 (5-62), 我们选取如下初始猜测解

$$\varphi_0(t, x_1, x_2) = \sin(x_1 + x_2 + 1). \quad (5-69)$$

注意到通解

$$\varphi_m(t, x_1, x_2) = \chi_m \varphi_{m-1}(t, x_1, x_2) + c_0 \int_1^t \delta_{3,m-1}(z, x_1, x_2) dz, \quad (5-70)$$

这也意味着每步仅需对时间  $t$  积分一次, 即可求出原有的偏微分方程 (5-61) 和 (5-62) 的逐阶同伦近似解。当求出  $M$  阶同伦近似解之后, 初始时刻的同伦近似解即可得到

$$\tilde{y}_0 = \tilde{\varphi}_M(0, 0, 0), \quad \tilde{z}_0^{(1)} = \left. \frac{\partial \tilde{\varphi}_M(0, x_1, 0)}{\partial x_1} \right|_{x_1=0}, \quad \tilde{z}_0^{(2)} = \left. \frac{\partial \tilde{\varphi}_M(0, 0, x_2)}{\partial x_2} \right|_{x_2=0}.$$

考虑到对称性, 有

$$\tilde{z}_0^{(1)} - z_0^{(1)} = \tilde{z}_0^{(2)} - z_0^{(2)}. \quad (5-71)$$

同样得, 我们定义如下两个误差

$$\begin{cases} \tilde{\mathcal{E}} = \int_0^T \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} [(\tilde{\varphi}_M - u)^2] dx_1 dx_2 dt, \\ \mathcal{E} = \int_0^T \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \mathcal{N}_3[\tilde{\varphi}_M(t, x_1, x_2)] \right\}^2 dx_1 dx_2 dt. \end{cases} \quad (5-72)$$

通过计算, 同伦级数解的收敛域为  $c_0 \in [-1.3, -0.4]$ , 但最优的  $c_0$  (对应于最小的误差  $\mathcal{E}$ ) 在  $-1$  附近, 因此我们选取  $c_0 = -1$ 。相应的同伦近似解为

$$\begin{cases} \tilde{\varphi}_1(t, x) = (t-1) \cos(1+x_1+x_2) + \sin(1+x_1+x_2); \\ \tilde{\varphi}_2(t, x) = (t-1) \cos(1+x_1+x_2) - \frac{1}{2}(t^2-2t-1) \sin(1+x_1+x_2); \\ \tilde{\varphi}_3(t, x) = -\frac{1}{6}(t^3-3t^2-3t+5) \cos(1+x_1+x_2) \\ \quad - \frac{1}{2}(t^2-2t-1) \sin(1+x_1+x_2); \\ \dots \end{cases}$$

表5-3给出了同伦分析方法在不同阶数时的结果, 可以发现仅需  $0.5s$ , 同伦级数解与精确解之间的误差就降至  $10^{-17}$  量级。因此, 同伦分析方法对于带有 2 维布朗运动的倒向型随机微分方程依然有效。图5-4比较了  $t = 0, 0.25, 0.5, 0.75$  时的同伦级数解与精确解, 可以发现同伦级数解与精确解吻合很好。

表 5-3 带有 2 维布朗运动的倒向型随机微分方程, 使用同伦分析方法在不同阶数时得到的结果。

Table 5-3 The squared residual error, used CPU time (second) and the relative error between the homotopy approximations  $\tilde{y}_0, \tilde{z}_0^{(1)}$  and the exact solutions  $y_0, z_0^{(1)}$  of Eq. (5-59), respectively. Here,  $m$  denotes the order of approximation.

$m$	$\tilde{\mathcal{E}}$	$\tilde{y}_1 - y_0^{(1)}$	$\tilde{y}_2 - y_0^{(2)}$	time (s)
4	$4 \times 10^{-6}$	$6 \times 10^{-3}$	$-6 \times 10^{-3}$	0.06
8	$3 \times 10^{-13}$	$2 \times 10^{-6}$	$-2 \times 10^{-6}$	0.12
12	$8 \times 10^{-22}$	$1 \times 10^{-10}$	$-1 \times 10^{-10}$	0.23
16	$2 \times 10^{-31}$	$2 \times 10^{-15}$	$-2 \times 10^{-15}$	0.36
20	$1 \times 10^{-41}$	$-4 \times 10^{-17}$	$7 \times 10^{-17}$	0.50

## 5.2 求解正倒向型随机微分方程

本节, 我们将采用同伦分析方法求解三种不同类型的正倒向型随机微分方程, 其中包含一维的正倒向型随机微分方程, 一维的 2 阶正倒向型随机微分方程和高维的正倒向型随机微分方程。

### 5.2.1 一维正倒向型随机微分方程

我们先考虑一个耦合的正倒向型随机微分方程

$$\begin{cases} dx_t = y_t \sin(t + x_t)dt + y_t \cos(t + x_t)dW_t, \\ -dy_t = \left[ \frac{1}{2}y_t^2 z_t - \cos(t + x_t)(y_t^2 + 1) \right] dt - z_t dW_t, & 0 \leq t \leq T, \\ x_0 = \frac{1}{2}, \quad y_T = \sin(T + x_T), \end{cases} \quad (5-73)$$

其精确解为

$$y_t = \sin(t + x_t), \quad z_t = \cos^2(t + x_t) \sin(t + x_t). \quad (5-74)$$

在初始时刻

$$y_0 = \sin(x_0), \quad z_0 = \cos^2(x_0) \sin(x_0).$$

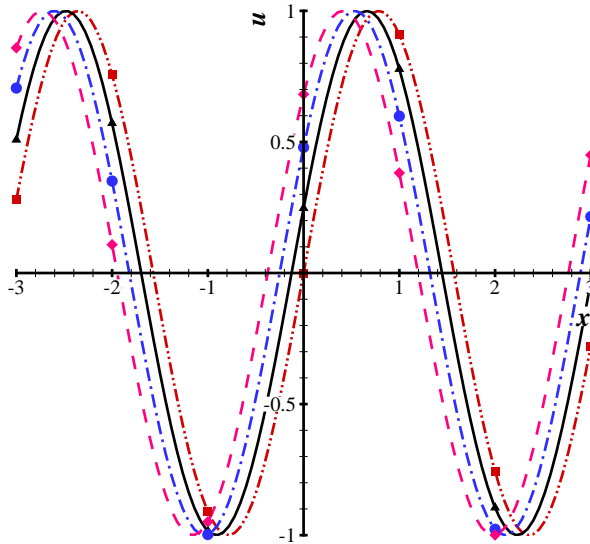


图 5-4 带有 2 维布朗运动的倒向型随机微分方程，比较  $t = 0, 0.25, 0.5, 0.75$  时的同伦级数解与精确解。双点虚线： $t = 0$  时的同伦近似解；实线： $t = 0.25$  时的同伦近似解；点虚线： $t = 0.5$  时的同伦近似解；虚线： $t = 0.75$  时的同伦近似解；正方形： $t = 0$  时的精确解；上三角形： $t = 0.25$  时的精确解；圆形： $t = 0.5$  时的精确解；菱形： $t = 0.75$  时的精确解。

Fig. 5-4 Comparison between the homotopy approximation and the exact solution  $u$  of Eqs. (5-61) and (5-62), when  $x_1 = x_2 = x$ ,  $t = 0, 0.25, 0.5, 0.75$ . Dash-double-dotted line: homotopy approximation at  $t = 0$ ; Solid line: homotopy approximation at  $t = 0.25$ ; Dashed-dotted line: homotopy approximation at  $t = 0.5$ ; Dashed line: homotopy approximation at  $t = 0.75$ . Square: exact solution at  $t = 0$ ; Triangle up: exact solution at  $t = 0.25$ ; Circle: exact solution at  $t = 0.5$ ; Diamond: exact solution at  $t = 0.75$ .

我们同样令  $T = 1$ ，根据公式 (5-1)-(5-4)，可得相应的偏微分方程

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \sin(t+x)u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{4} \cos(2t+2x)u^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{4} u^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ + \frac{1}{2} \cos(t+x)u^3 \frac{\partial u}{\partial x} - \cos(t+x)(u^2+1) = 0, \end{aligned} \quad (5-75)$$

并服从边界条件

$$u(t, x) \Big|_{t=1} = \sin(1+x), \quad (5-76)$$

其精确解为  $u = \sin(t + x)$ 。

与前三小节不同，我们构造如下零阶形变方程

$$(1 - q) \frac{\partial}{\partial t} [\Phi(t, x, q) - \varphi_0(t, x)] = c_0 q \mathcal{N}_4 [\Phi(t, x, q), q], \quad (5-77)$$

服从边界条件

$$\Phi(t, x, q) \Big|_{t=1} = \sin(q + x), \quad (5-78)$$

其中， $\varphi_0$  为  $u(t, x)$  的初始猜测解，且

$$\begin{aligned} & \mathcal{N}_4 [\Phi(t, x, q), q] \\ &= \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \sin(tq + x) u \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{1}{4} \cos(2tq + 2x) \Phi^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{1}{4} \Phi^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \\ &+ \frac{1}{2} \cos(tq + x) \Phi^3 \frac{\partial \Phi}{\partial x} - \cos(tq + x) (\Phi^2 + 1). \end{aligned} \quad (5-79)$$

为了用幂函数基来表达待求函数  $u(t, x)$ ，我们在这里用  $\sin(tq + x)$ ， $\cos(tq + x)$  和  $\cos(2tq + 2x)$  分别取代了原方程中的  $\sin(t + x)$ ， $\cos(t + x)$ ， $\cos(2t + 2x)$ ，如若不然，在高阶形变方程中即会出现  $t^n \cos(t + x)$  和  $t^n \sin(t + x)$  项，这将与同伦分析方法中的“解表达”原则相违背。与此同时，通过计算，我们发现若将边界条件 (5-78) 中的  $\sin(1 + x)$  变成  $\sin(q + x)$ ，收敛速度会极大提升。这也是何我们构造上述形式的零阶形变方程 (5-77) - (5-79)。

我们同样将  $\Phi(t, x, q)$  展开成关于变量  $q$  的麦克劳林级数

$$\Phi(t, x, q) = \sum_{m=0}^{+\infty} \varphi_m(t, x) q^m. \quad (5-80)$$

把上述级数代入到零阶形变方程中，并对方程 (5-77)，(5-78) 左右两边同时对  $q$  求  $m$  阶导，再令  $q = 0$ ，然后方程左右两边同时除以  $m!$ ，可得高阶形变方程

$$\frac{\partial}{\partial t} (\varphi_m - \chi_m \varphi_{m-1}) = c_0 \delta_{4, m-1}, \quad (5-81)$$

服从边界条件

$$\varphi_m(t, x) \Big|_{t=1} = \frac{1}{m!} \sin \left( x + \frac{m\pi}{2} \right). \quad (5-82)$$

这里,

$$\begin{aligned}
\delta_{4,n}(t,x) &= \mathcal{D}_n\left(\mathcal{N}_4\left[\Phi(t,x,q),q\right]\right) \\
&= \frac{\partial\varphi_n}{\partial t} + \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^i \frac{t^j}{j!} \sin\left(x + \frac{j\pi}{2}\right) \varphi_{n-i} \frac{\partial\varphi_{i-j}}{\partial x} \\
&+ \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^i \sum_{k=0}^j \sum_{p=0}^k \frac{t^p}{2 \cdot p!} \cos\left(x + \frac{p\pi}{2}\right) \varphi_{n-i} \varphi_{i-j} \varphi_{j-k} \frac{\partial\varphi_{k-p}}{\partial x} \\
&+ \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^i \sum_{k=0}^j \frac{(2t)^k}{4 \cdot k!} \cos\left(2x + \frac{k\pi}{2}\right) \varphi_{n-i} \varphi_{i-j} \frac{\partial^2\varphi_{j-k}}{\partial x^2} \\
&+ \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^i \left[ \frac{1}{4} \frac{\partial^2\varphi_j}{\partial x^2} - \frac{t^j}{j!} \cos\left(x + \frac{j\pi}{2}\right) \right] \varphi_{n-i} \varphi_{i-j} \\
&- \frac{t^n}{n!} \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right). \tag{5-83}
\end{aligned}$$

则高阶形变方程的通解为

$$\varphi_m(t,x) = \chi_m \varphi_{m-1}(t,x) + c_0 \int_0^t \delta_{4,m-1}(t,x) dt + A_m(x). \tag{5-84}$$

为了满足边界条件 (5-78), 我们选取如下初始猜测解

$$\varphi_0(t,x) = \sin(x). \tag{5-85}$$

当依次求出  $\varphi_1(t,x)$ ,  $\varphi_2(t,x)$ ,  $\dots$  后, 可得  $u(t,x)$  的  $M$  阶同伦近似解

$$\tilde{\varphi}_M(t,x) = \sum_{m=0}^M \varphi_m(t,x), \tag{5-86}$$

在初始时刻, 有

$$\tilde{y}_0 = \tilde{\varphi}_M(0,x_0), \quad \tilde{z}_0 = \left[ \cos(x) \tilde{\varphi}_M \frac{\partial\tilde{\varphi}_M}{\partial x} \right] \Big|_{t=0, x=x_0}.$$

图5-5给出了  $\mathcal{E} \sim c_0$  曲线, 可以发现, 对于该算例, 同伦级数的收敛域很

小, 且最优的  $c_0 = -1$ 。因此我们选取  $c_0 = -1$ , 然后得到相应的同伦级数

$$\begin{cases} \tilde{\varphi}_1(t, x) = \sin(x) + t \cos(x); \\ \tilde{\varphi}_2(t, x) = \sin(x) + t \cos(x) - \frac{1}{2}t^2 \sin(x); \\ \tilde{\varphi}_3(t, x) = \sin(x) + t \cos(x) - \frac{1}{2}t^2 \sin(x) - \frac{1}{6}t^3 \cos(x); \\ \dots \end{cases} \quad (5-87)$$

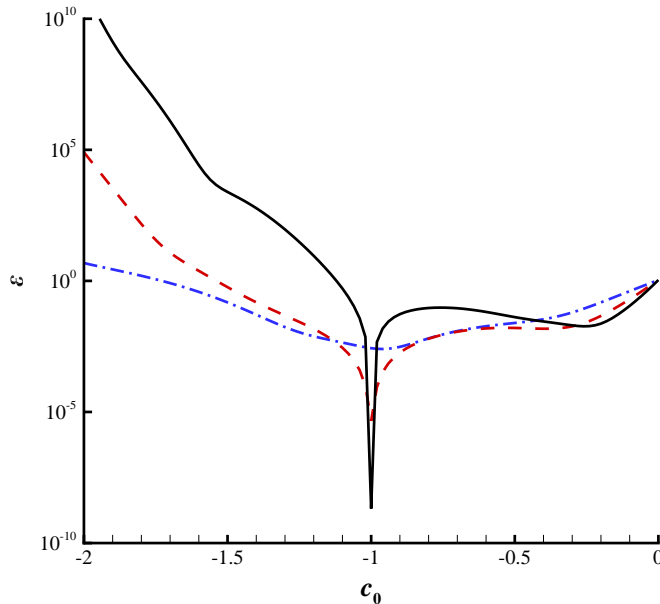


图 5-5 正倒向型随机微分方程,  $\mathcal{E} \sim c_0$  曲线。点虚线: 三阶同伦近似; 虚线: 五阶同伦近似; 实线: 七阶同伦近似。

Fig. 5-5 The squared residual error versus  $c_0$  of Eq. (5-77). Dash-dotted line: 3th-order approximation; Dashed line: 5th-order approximation; Solid line: 7th-order approximation.

不难发现同伦近似解  $\tilde{\varphi}_M(t, x)$  实际上为精确解  $u(t, x) = \sin(x + t)$  对  $t$  的一个麦克劳林级数展开 (详细证明请见附录B), 即

$$\tilde{\varphi}_M(t, x) = \sum_{i=0}^M \frac{t^i}{i!} \sin\left(x + \frac{i}{2}\pi\right). \quad (5-88)$$



这也意味着我们的同伦级数解收敛于原方程的精确解。表5-4给出了同伦分析方法在不同阶数的结果，可以发现：初始时刻的同伦级数解与精确解完全相同，且仅需 1.8s，全局误差  $\tilde{\mathcal{E}}$  即降至  $9 \times 10^{-42}$ 。因此，同伦分析方法对于正倒向型随机微分方程依然有效。

表 5-4 正倒向型随机微分方程，使用同伦分析方法在不同阶数时得到的结果。

Table 5-4 The squared residual error, used CPU time (second) and the relative error between the homotopy approximations  $\tilde{y}_0, \tilde{z}_0^{(1)}$  and the exact solutions  $y_0, z_0^{(1)}$  of Eq. (5-59), respectively. Here,  $m$  denotes the order of approximation.

$m$	$\tilde{\mathcal{E}}$	$\tilde{y}_0 - y_0$	$\tilde{z}_0 - z_0$	CPU time (s)
4	$4 \times 10^{-6}$	0	0	0.02
8	$3 \times 10^{-13}$	0	0	0.11
12	$7 \times 10^{-22}$	0	0	0.33
16	$2 \times 10^{-31}$	0	0	0.78
20	$9 \times 10^{-42}$	0	0	1.81

### 5.2.2 2 阶正倒向型随机微分方程

本节，我们考虑如下一个 2 阶正倒向型随机微分方程

$$\begin{cases} dx_t = \sin(t + x_t)dt + \cos(t + x_t)dW_t, \\ -dy_t = \left[ -\cos(t + x_t)z_t - \cos(t + x_t)(y_t^2 + y_t) - \frac{\Gamma_t}{4} \right] dt - z_t dW_t, \\ dz_t = A_t dt + \Gamma_t dW_t, \quad 0 \leq t \leq T, \\ x_0 = \frac{1}{2}, \quad y_T = \sin(T + x_T), \end{cases} \quad (5-89)$$

其精确解为

$$\begin{cases} y_t = \sin(t + x_t), \quad z_t = \cos^2(t + x_t), \\ \Gamma_t = -2 \sin(t + x_t) \cos^2(t + x_t), \\ A_t = -\sin(2t + 2x_t) [1 + \sin(t + x_t)] - \cos(2t + 2x_t) \cos^2(t + x_t). \end{cases} \quad (5-90)$$

在初始时刻  $t = 0$ ，有

$$\begin{cases} y_0 = \sin(x_0), \quad z_0 = \cos^2(x_0), \quad \Gamma_0 = -2 \sin(x_0) \cos^2(x_0), \\ A_0 = -\sin(2x_0) [1 + \sin(x_0)] - \cos(2x_0) \cos^2(x_0). \end{cases}$$

不失一般性, 我们令  $T = 1$ 。由公式 (5-5)-(5-7), 可得相应的偏微分方程

$$\begin{aligned} & \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{8} [1 + \cos(2t + 2x)] \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \cos(t + x)(u^2 + u) \\ & + \left[ \sin(t + x) + \frac{1}{8} \sin(2t + 2x) - \frac{1}{2} \cos(2t + 2x) - \frac{1}{2} \right] \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \end{aligned} \quad (5-91)$$

并服从边界条件

$$u(t, x) \Big|_{t=1} = \sin(1 + x). \quad (5-92)$$

与 5.2.1 节相似, 我们构造如下零阶形变方程

$$(1 - q) \frac{\partial}{\partial t} [\Phi(t, x, q) - \varphi_0(t, x)] = c_0 q \mathcal{N}_5 [\Phi(t, x, q), q] \quad (5-93)$$

并服从边界条件

$$\Phi(t, x, q) \Big|_{t=1} = \sin(q + x), \quad (5-94)$$

其中,

$$\begin{aligned} & \mathcal{N}_5 [\Phi(t, x, q), q] \\ & = \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{8} [1 + \cos(2tq + 2x)] \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \cos(tq + x)(\Phi^2 + \Phi) \\ & + \left[ \sin(tq + x) + \frac{1}{8} \sin(2tq + 2x) - \frac{1}{2} \cos(2tq + 2x) - \frac{1}{2} \right] \frac{\partial \Phi}{\partial x} \end{aligned} \quad (5-95)$$

对应于原始方程 (5-91)。注意到, 此时同样为了保证同伦级数的解表达为幂函数形式, 我们用  $\cos(tq + x)$ ,  $\sin(tq + x)$  分别取代了原始方程中的  $\cos(t + x)$ ,  $\sin(t + x)$ 。

与零阶形变方程 (5-93) - (5-95) 相对应的高阶形变方程为

$$\frac{\partial}{\partial t} (\varphi_m - \chi_m \varphi_{m-1}) = c_0 \delta_{5, m-1}, \quad (5-96)$$

并服从边界条件

$$\varphi_m(t, x) \Big|_{t=1} = \frac{1}{m!} \sin \left( x + \frac{m\pi}{2} \right), \quad (5-97)$$

这里,

$$\begin{aligned}
\delta_{5,n} &= \mathcal{D}_n \left( \mathcal{N}_5 \left[ \Phi(t, x, q), q \right] \right) \\
&= \frac{\partial \varphi_n}{\partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial \varphi_n}{\partial x} + \frac{1}{8} \frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial x^2} + \sum_{i=0}^n \frac{t^i}{i!} \sin \left( x + \frac{i\pi}{2} \right) \frac{\partial \varphi_{n-i}}{\partial x} \\
&+ \sum_{i=0}^n \frac{t^i}{i!} \left[ \frac{2^i}{8} \cos \left( 2x + \frac{i\pi}{2} \right) \frac{\partial^2 \varphi_{n-i}}{\partial x^2} - \cos \left( x + \frac{i\pi}{2} \right) \varphi_{n-i} \right] \\
&+ \sum_{i=0}^n \frac{(2t)^i}{i!} \left[ \frac{1}{8} \sin \left( 2x + \frac{i\pi}{2} \right) - \frac{1}{2} \cos \left( 2x + \frac{i\pi}{2} \right) \right] \frac{\partial \varphi_{n-i}}{\partial x} \\
&- \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{n-i} \frac{t^i}{i!} \cos \left( x + \frac{i\pi}{2} \right) \varphi_j \varphi_{n-i-j}, \tag{5-98}
\end{aligned}$$

我们依旧选取  $\varphi_0 = \sin(x)$  作为  $u(t, x)$  的初始猜测解, 则通解为

$$\varphi_m(t, x) = \chi_m \varphi_{m-1}(t, x) + c_0 \int_0^t \delta_{5,m-1}(t, x) dt + B_m(x), \tag{5-99}$$

当我们求出  $M$  阶同伦近似解  $\tilde{\varphi}_M$ , 即可得到  $t = 0$  时的结果

$$\begin{cases} \tilde{y}_0 = \tilde{\varphi}_M(0, x_0), & \tilde{z}_0 = \left[ \cos(x) \frac{\partial \tilde{\varphi}_M}{\partial x} \right] \Big|_{t=0, x=x_0}, \\ \tilde{\Gamma}_0 = \left\{ \cos(x) \frac{\partial}{\partial x} \left[ \cos(x) \frac{\partial \tilde{\varphi}_M}{\partial x} \right] \right\} \Big|_{t=0, x=x_0}, \\ \tilde{A}_0 = \left\{ \tilde{\mathcal{L}} \left[ \cos(x) \frac{\partial \tilde{\varphi}_M}{\partial x} \right] \right\} \Big|_{t=0, x=x_0}, \end{cases} \tag{5-100}$$

这里, 线性算子  $\tilde{\mathcal{L}}$  由 (5-7) 定义。

与 5.2.1 节相似, 我们发现最优的收敛控制参数  $c_0$  依旧为  $-1$ , 取  $c_0 = -1$ , 可得同伦近似解

$$\begin{cases} \tilde{\varphi}_1(t, x) = \sin(x) + t \cos(x); \\ \tilde{\varphi}_2(t, x) = \sin(x) + t \cos(x) - \frac{1}{2} t^2 \sin(x); \\ \tilde{\varphi}_3(t, x) = \sin(x) + t \cos(x) - \frac{1}{2} t^2 \sin(x) - \frac{1}{6} t^3 \cos(x); \\ \dots \end{cases} \tag{5-101}$$

不难发现同伦级数解  $\tilde{\varphi}_M(t, x)$  恰好是精确解  $u(t, x) = \sin(x + t)$  关于时间  $t$  的一个麦克劳林级数展开式 (仿照附录 B 易证)。此外, 表 5-5 给出了同伦近似解在初始时刻的值, 可以发现求出的  $\tilde{y}_0, \tilde{z}_0, \tilde{\Gamma}_0$  和  $\tilde{A}_0$  与精确解  $y_0, z_0, \Gamma_0, A_0$  完全相同。而且仅需 0.28s, 误差  $\tilde{\mathcal{E}}$  即降至  $7 \times 10^{-29}$ 。因此, 同伦分析方法对于 2 阶正倒向型随机微分方程依旧有效。

表 5-5 2 阶正倒向型随机微分方程, 使用同伦分析方法在不同阶数时得到的结果。

Table 5-5 The squared residual error, the used CPU time (second) and the relative error between the homotopy approximations  $\tilde{y}_0, \tilde{z}_0, \tilde{\Gamma}_0, \tilde{A}_0$  and the exact solutions  $y_0, z_0, \Gamma_0, A_0$  of Eq. (5-89), respectively. Here,  $m$  denotes the order of approximation.

$m$	$\tilde{\mathcal{E}}$	$\tilde{y}_0 - y_0$	$\tilde{z}_0 - z_0$	$\tilde{\Gamma}_0 - \Gamma_0$	$\tilde{A}_0 - A_0$	time (s)
4	$1 \times 10^{-4}$	0	0	0	0	0.05
8	$2 \times 10^{-9}$	0	0	0	0	0.08
12	$3 \times 10^{-15}$	0	0	0	0	0.13
16	$8 \times 10^{-22}$	0	0	0	0	0.19
20	$7 \times 10^{-29}$	0	0	0	0	0.28

### 5.2.3 高维正倒向型随机微分方程

众所周知, 对于高维问题, 数值方法通常会遇到所谓的“维度灾难”。如何提高计算效率, 如何快速求解高维正倒向型随机微分方程也一直是人们十分关心的一个问题。本节作者采用同伦分析方法求解一个  $d$  维的线性正倒向型随机微分方程, 来揭示同伦分析方法对于高维正倒向型随机微分方程的有效性和高效性。

我们考虑如下一个非耦合的正倒向型随机微分方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{i=1}^d b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d \sigma_{i,i}^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + f = 0, \quad (5-102)$$

这里

$$\left\{ \begin{array}{l} b_i = \frac{1}{d} x_i e^{-x_i^2}, \quad \sigma_{i,i} = \frac{1}{d} e^{-x_i^2}, \quad i = 1, 2, \dots, d, \\ f = -\sum_{i=1}^d x_i z_i + \frac{1}{d^2} y - \frac{1}{d^3} \sum_{i=1}^d \left[ \left( x_i^2 + e^{-2x_i^2} \right) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^d (x_k + t) \right] \\ \quad - \frac{1}{d} \sum_{i=1}^d \left[ x_i^2 \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^d \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i \\ k \neq j}}^d (x_k + t) \right], \end{array} \right. \quad (5-103)$$

其精确解为

$$\left\{ \begin{array}{l} y_t = \frac{1}{d} \sum_{j=1}^d \left[ x_{t,j}^2 \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^d (x_{t,k} + t) \right], \\ z_{t,i} = \frac{1}{d^2} e^{-x_{t,i}^2} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^d \left[ x_{t,j}^2 \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i \\ k \neq j}}^d (x_{t,k} + t) \right] + \frac{2x_{t,i}}{d^2} e^{-x_{t,i}^2} \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^d (x_{t,k} + t). \end{array} \right.$$

不失一般性, 我们取  $T = 1$ ,  $x_{0,i} = 1$ ,  $i = 1, 2, \dots, d$ 。则初始时刻的精确值为

$$y_0 = 1, \quad z_{0,i} = \frac{d+1}{ed^2}, \quad i = 1, 2, \dots, d.$$

根据公式 (5-1)-(5-4), 可得相应的偏微分方程

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_6[u] = & \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2d^2} \sum_{i=1}^d \left( e^{-2x_i^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \right) + \frac{u}{d^2} - \frac{1}{d} \sum_{i=1}^d \left[ x_i^2 \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^d \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i \\ k \neq j}}^d (x_k + t) \right] \\ & - \frac{1}{d^3} \sum_{i=1}^d \left[ (x_i^2 + e^{-2x_i^2}) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^d (x_k + t) \right] = 0, \end{aligned} \quad (5-104)$$

并服从边界条件

$$u(t, \mathbf{x}) \Big|_{t=1} = \frac{1}{d} \sum_{j=1}^d \left[ x_j^2 \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^d (x_k + 1) \right], \quad (5-105)$$

这里, 向量  $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_d\}$ , 非线性算子  $\mathcal{N}_6$  由 (5-104) 定义。

在同伦分析方法框架中, 我们构造如下零阶形变方程

$$(1 - q) \frac{\partial}{\partial t} [\Phi(t, \mathbf{x}, q) - \varphi_0(t, \mathbf{x})] = c_0 q \mathcal{N}_6 [\Phi(t, \mathbf{x}, q)], \quad (5-106)$$

并服从边界条件

$$\Phi(t, \mathbf{x}, q) \Big|_{t=1} = \frac{1}{d} \sum_{j=1}^d \left[ x_j^2 \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^d (x_k + 1) \right], \quad (5-107)$$

这里  $\varphi_0$  为  $u$  的初始猜测解, 且满足边界条件 (5-105)。

类似得, 我们将  $\Phi(t, \mathbf{x}, q)$  展开成关于  $q$  的麦克劳林级数, 即

$$\Phi(t, \mathbf{x}, q) = \sum_{m=0}^{+\infty} \varphi_m(t, \mathbf{x}) \cdot q^m. \quad (5-108)$$

把 (5-108) 代入到零阶形变方程 (5-106) 和 (5-107) 中, 并令方程左右两边  $q^m$  系数相等, 可得  $m$  阶同伦形变方程

$$\frac{\partial}{\partial t} [\varphi_m - \chi_m \varphi_{m-1}] = c_0 \delta_{6,m-1}, \quad (5-109)$$

服从边界条件

$$\varphi_m(t, \mathbf{x}) \Big|_{t=1} = 0, \quad (5-110)$$

这里,

$$\begin{aligned} \delta_{6,m-1} &= \mathcal{D}_{m-1} \left\{ \mathcal{N}_6 \left[ \Phi(t, \mathbf{x}, q) \right] \right\} \\ &= \left\{ \frac{\partial \varphi_{m-1}}{\partial t} + \frac{\varphi_{m-1}}{d^2} + \frac{1}{2d^2} \sum_{i=1}^d \left( e^{-2x_i^2} \cdot \frac{\partial^2 \varphi_{m-1}}{\partial x_i^2} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{d^3} \sum_{i=1}^d \left[ (x_i^2 + e^{-2x_i^2}) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^d (x_k + t) \right] (1 - \chi_m) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{d} \sum_{i=1}^d \left[ x_i^2 \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^d \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i \\ k \neq j}}^d (x_k + t) \right] (1 - \chi_m) \right\}. \end{aligned} \quad (5-111)$$

于是, 通解为

$$\varphi_m(t, \mathbf{x}) = \chi_m \varphi_{m-1}(t, \mathbf{x}) + c_0 \int_1^t \delta_{6,m-1}(t, \mathbf{x}) dt, \quad (5-112)$$

为了满足边界条件 (5-105), 我们选取如下初始猜测解

$$\varphi_0(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{d} \sum_{j=1}^d \left[ x_j^2 \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^d (x_k + 1) \right]. \quad (5-113)$$

利用通解 (5-112) 和初始猜测解 (5-113), 可依次求出  $\varphi_1(t, \mathbf{x})$ ,  $\varphi_2(t, \mathbf{x})$ ,  $\dots$ .  $u(t, \mathbf{x})$  的  $M$  阶同伦近似解为

$$\tilde{\varphi}_M(t, \mathbf{x}) = \sum_{m=0}^M \varphi_m(t, \mathbf{x}), \quad (5-114)$$

在初始时刻, 有

$$\tilde{y}_0 = \tilde{\varphi}_M(0, \mathbf{x}_0), \quad \tilde{z}_{0,i} = \left[ \frac{1}{d} e^{-x_i^2} \frac{\partial \tilde{\varphi}_M}{\partial x_i} \right] \Big|_{t=0, \mathbf{x}=\mathbf{x}_0}, \quad i = 1, 2, \dots, d.$$

根据计算, 对于任意的  $c_0 \in [-1.1, -0.6]$ , 均能获得收敛的结果, 但取  $c_0 = -1$  的计算效率最高, 如图5-6所示。因此从计算效率的角度出发, 我们取  $c_0 = -1$ 。图5-7比较了4维情况下的同伦级数解和精确解, 可以发现两者吻合很好。为了进一步探索维度对计算效率的影响, 我们不断增加维度  $d$ , 具体结果如表5-6至5-10所示。可以发现在6维情况下, 使用同伦分析方法仅需5s即可获得高精度的解(与精确解的误差为  $10^{-7}$  量级), 而根据文章[96], 要达到同样的精度, 基于稀疏网格的谱方法却需要18481s, 其计算效率比同伦分析方法低3000余倍。此外, 如表5-6至5-10所示, 即使对于不同维度, 利用同伦分析方法均能在第五阶获得高精度的结果, 而且我们仅需3084s就能成功求解12维的算例。这些均揭示了同伦分析方法对于高维的正倒向型随机微分方程的巨大潜力。为了更好地凸显同伦分析方法的优点, 我们让  $t_S$  和  $t_H$  分别表示若想获得  $10^{-7}$  精度的结果, 基于稀疏网格的谱方法[96]和同伦分析方法所需的CPU时间, 可以得到如下拟合公式

$$t_H = \exp(-3.2 + 0.95d), \quad (5-115)$$

$$t_S = \exp(-7.6 + 2.9d), \quad (5-116)$$

这里  $d \geq 3$ 。计算效率曲线如图5-8所示。注意到, 虽然随着维度增加, 同伦分析方法和基于稀疏网格的谱方法[96]的计算效率均呈指数型衰减, 但是同伦分析方法的计算效率衰减的速度明显慢于基于稀疏网格的谱方法, 这也意味着同伦分析方法对于高维正倒向型问题依然有效, 高效!

值得强调的是, 在本节中, 我们采用同伦分析方法求解了三类不同的正倒向型随机微分方程, 处理方法与5.1节中处理倒向型随机微分方程的完全一致。因此对于同伦分析方法而言, 倒向型随机微分方程与正倒向型随机微分方程并无本质区别!

### 5.3 总结

本章, 作者采用同伦分析方法成功求解3种倒向型随机微分方程和三种正倒向型随机微分方程(其中包含一个12维的算例), 并在很短的时间内得到高精度的结果, 成功验证了同伦分析方法对于该类问题的有效性和高效性。

此外, 无论是求解倒向型随机微分方程或正倒向型随机微分方程, 我们采取相同的求解策略, 都获得了收敛的结果。这说明对于同伦分析方法而言, 倒



表 5-6 4 维正倒向型随机微分方程，使用同伦分析方法在不同阶数时得到的结果。

Table 5-6 The squared residual error, the used CPU time (second) and the relative error between the homotopy approximations  $\tilde{y}_0, \tilde{z}_0$  and the exact solutions  $y_0, z_0$  of Eqs. (5-102) and (5-103), respectively, when  $d = 4$ . Here,  $m$  denotes the order of approximation.

$m$	$\tilde{\mathcal{E}}$	$\tilde{y}_0 - y_0$	$\tilde{z}_0 - z_0$	time (s)
2	$1 \times 10^{-3}$	$8 \times 10^{-3}$	$3 \times 10^{-4}$	0.1
4	$1 \times 10^{-10}$	$2 \times 10^{-6}$	$4 \times 10^{-7}$	0.7
5	$1 \times 10^{-11}$	$-2 \times 10^{-7}$	$8 \times 10^{-8}$	1.6
6	$4 \times 10^{-12}$	$-3 \times 10^{-8}$	$3 \times 10^{-9}$	3
8	$1 \times 10^{-12}$	$2 \times 10^{-9}$	$-7 \times 10^{-10}$	10
10	$9 \times 10^{-13}$	$-6 \times 10^{-11}$	$7 \times 10^{-11}$	26

表 5-7 6 维正倒向型随机微分方程，使用同伦分析方法在不同阶数时得到的结果。

Table 5-7 The squared residual error, the used CPU time (second) and the relative error between the homotopy approximations  $\tilde{y}_0, \tilde{z}_0$  and the exact solutions  $y_0, z_0$  of Eqs. (5-102) and (5-103), respectively, when  $d = 6$ . Here,  $m$  denotes the order of approximation.

$m$	$\tilde{\mathcal{E}}$	$\tilde{y}_0 - y_0$	$\tilde{z}_0 - z_0$	time (s)
2	$2 \times 10^{-2}$	$9 \times 10^{-3}$	$2 \times 10^{-4}$	0.6
4	$3 \times 10^{-11}$	$5 \times 10^{-7}$	$5 \times 10^{-8}$	5
5	$9 \times 10^{-15}$	$-2 \times 10^{-8}$	$4 \times 10^{-9}$	11
6	$3 \times 10^{-16}$	$-1 \times 10^{-9}$	$5 \times 10^{-11}$	21
8	$5 \times 10^{-18}$	$1 \times 10^{-11}$	$-3 \times 10^{-12}$	66
10	$2 \times 10^{-19}$	$-1 \times 10^{-13}$	$6 \times 10^{-14}$	159

表 5-8 8 维正倒向型随机微分方程, 使用同伦分析方法在不同阶数时得到的结果。

Table 5-8 The squared residual error, the used CPU time (second) and the relative error between the homotopy approximations  $\tilde{y}_0, \tilde{z}_0$  and the exact solutions  $y_0, z_0$  of Eqs. (5-102) and (5-103), respectively, when  $d = 8$ . Here,  $m$  denotes the order of approximation.

$m$	$\tilde{\mathcal{E}}$	$\tilde{y}_0 - y_0$	$\tilde{z}_0 - z_0$	time (s)
2	1	$1 \times 10^{-2}$	$3 \times 10^{-4}$	3
4	$1 \times 10^{-10}$	$3 \times 10^{-7}$	$2 \times 10^{-8}$	34
5	$1 \times 10^{-15}$	$-6 \times 10^{-9}$	$5 \times 10^{-10}$	74
6	$7 \times 10^{-19}$	$-2 \times 10^{-10}$	$3 \times 10^{-12}$	149
8	$1 \times 10^{-21}$	$7 \times 10^{-13}$	$-8 \times 10^{-14}$	451
10	$5 \times 10^{-24}$	$-2 \times 10^{-15}$	$5 \times 10^{-16}$	1084

表 5-9 10 维正倒向型随机微分方程, 使用同伦分析方法在不同阶数时得到的结果。

Table 5-9 The squared residual error, the used CPU time (second) and the relative error between the homotopy approximations  $\tilde{y}_0, \tilde{z}_0$  and the exact solutions  $y_0, z_0$  of Eqs. (5-102) and (5-103), respectively, when  $d = 10$ . Here,  $m$  denotes the order of approximation.

$m$	$\tilde{\mathcal{E}}$	$\tilde{y}_0 - y_0$	$\tilde{z}_0 - z_0$	time (s)
2	58	$2 \times 10^{-2}$	$4 \times 10^{-4}$	21
4	$1 \times 10^{-9}$	$2 \times 10^{-7}$	$8 \times 10^{-9}$	196
5	$4 \times 10^{-15}$	$-3 \times 10^{-9}$	$2 \times 10^{-10}$	497
6	$2 \times 10^{-20}$	$-6 \times 10^{-11}$	$4 \times 10^{-13}$	876
8	$2 \times 10^{-22}$	$1 \times 10^{-13}$	$-6 \times 10^{-15}$	2920

表 5-10 12 维正倒向型随机微分方程, 使用同伦分析方法在不同阶数时得到的结果。

Table 5-10 The squared residual error, the used CPU time (second) and the relative error between the homotopy approximations  $\tilde{y}_0, \tilde{z}_0$  and the exact solutions  $y_0, z_0$  of Eqs. (5-102) and (5-103), respectively, when  $d = 12$ . Here,  $m$  denotes the order of approximation.

$m$	$\tilde{\mathcal{E}}$	$\tilde{y}_0 - y_0$	$\tilde{z}_0 - z_0$	time (s)
2	4274	$5 \times 10^{-2}$	$7 \times 10^{-4}$	121
3	$1 \times 10^{-2}$	$1 \times 10^{-4}$	$2 \times 10^{-6}$	424
4	$2 \times 10^{-8}$	$2 \times 10^{-7}$	$6 \times 10^{-9}$	1154
5	$3 \times 10^{-14}$	$-2 \times 10^{-9}$	$7 \times 10^{-11}$	3084

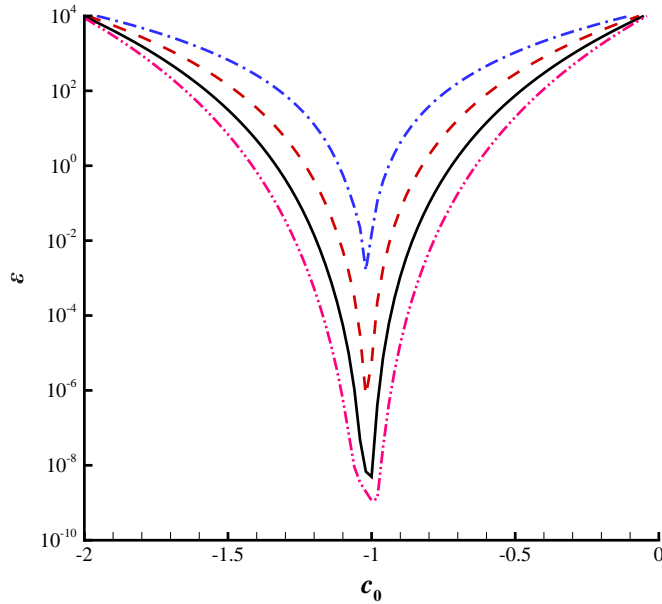


图 5-6  $d$  正倒向型随机微分方程,  $\mathcal{E} \sim c_0$  曲线。点虚线：二阶同伦近似；虚线：三阶同伦近似；实线：四阶同伦近似；双点虚线：五阶同伦近似。

Fig. 5-6 The squared residual error of Eq. (5-104) versus  $c_0$  in case of  $d = 4$ . Dash-dotted line: 2th-order approximation; Dashed line: 3th-order approximation; Solid line: 4th-order approximation; Dash-double-dotted line: 5th-order approximation.

向型随机微分方程与正倒向型随机微分方程并没有本质区别。而且，对于这 6 种不同的方程，我们均选取了同样的辅助线性算子

$$\mathcal{L}[u] = \frac{\partial u}{\partial t}. \quad (5-117)$$

该线性算子十分简单，使得我们仅需积分一次即可得到下一阶的同伦级数解，这也是同伦分析方法的计算效率为何如此高的原因。注意到，线性算子 (5-117) 并非原偏微分方程中的线性部分。若我们采用摄动方法求解偏微分方程 (5-17) 和 (5-18)，我们将不得不处理一个十分复杂的线性算子

$$\hat{\mathcal{L}}[u] = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\theta}{2} (1 - \theta) (1 - 2\theta) \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\theta^2}{2} (1 - \theta)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}, \quad (5-118)$$

而该线性算子有可能无法给出收敛的结果（包含了错误信息）。

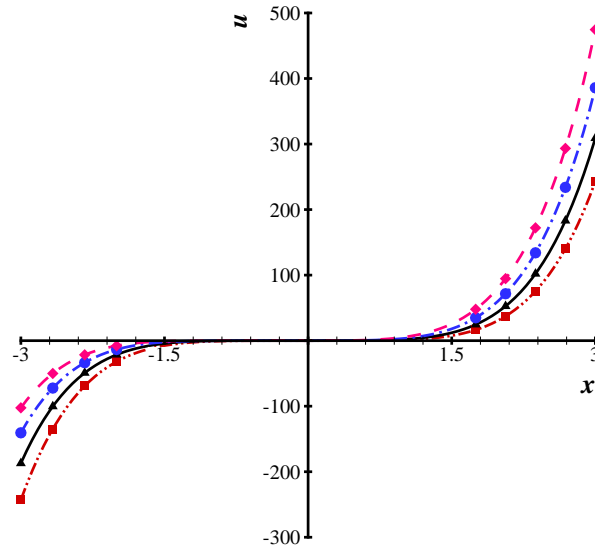


图 5-7 4 维正倒向型随机微分方程，比较  $t = 0, 0.25, 0.5, 0.75$  时的同伦级数解与精确解。双点虚线： $t = 0$  时的同伦近似解；实线： $t = 0.25$  时的同伦近似解；点虚线： $t = 0.5$  时的同伦近似解；虚线： $t = 0.75$  时的同伦近似解；正方形： $t = 0$  时的精确解；上三角形： $t = 0.25$  时的精确解；圆形： $t = 0.5$  时的精确解；菱形： $t = 0.75$  时的精确解。

Fig. 5-7 Comparison between the homotopy approximations and the exact solution  $u$  of Eqs. (5-104) and (5-105) in case of  $d = 4$  when  $t = 0, 0.25, 0.5, 0.75$ ,  $x_i = x$ ,  $i = 1, 2, \dots, d$ . Dash-double-dotted line: homotopy approximation at  $t = 0$ ; Solid line: homotopy approximation at  $t = 0.25$ ; Dashed-dotted line: homotopy approximation at  $t = 0.5$ ; Dashed line: homotopy approximation at  $t = 0.75$ . Square: exact solution at  $t = 0$ ; Triangle up: exact solution at  $t = 0.25$ ; Circle: exact solution at  $t = 0.5$ ; Diamond: exact solution at  $t = 0.75$ .

回顾 5.1 节和 5.2 节，若我们将偏微分方程中的变量  $x$ （代表随机干扰）看成常量，而仅关注时间  $t$ ，则偏微分方程可看成是一个关于  $t$  的一阶常微分方程，并带有一个边界条件。这样，选取线性算子 (5-117) 也就变得情理之中。同伦分析方法赋予了我们极大的自由来选取基函数，线性算子和收敛控制参数，也正是这份“自由”凸显了同伦分析方法的独特性和优越性。

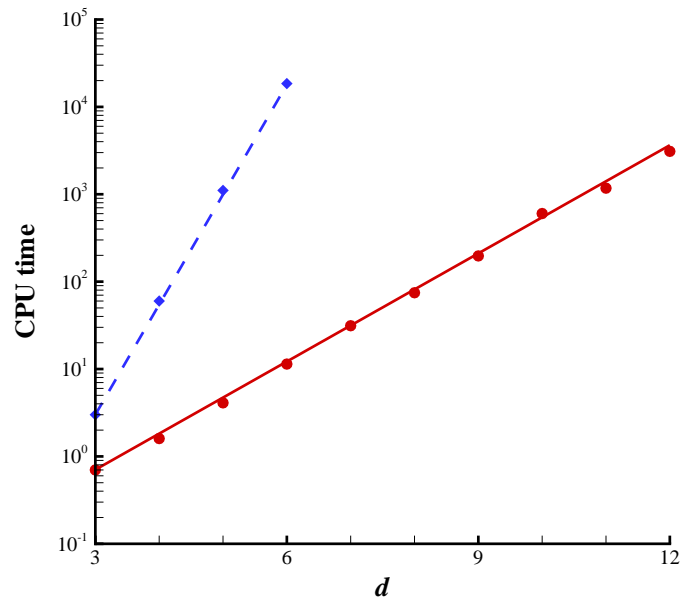


图 5-8 高维正倒向型随机微分方程，同伦分析方法和基于稀疏网格的谱方法 [96] 的计算效率。圆圈：使用同伦分析方法计算到五阶所需的 CPU 时间；菱形：基于稀疏网格的谱方法 [96] 所需的 CPU 时间；实线：拟合公式 (5-115)；虚线：拟合公式 (5-116)。

Fig. 5-8 The used CPU time (second) versus dimensionality  $d$  of Eqs. (5-104) and (5-105). Circle: CPU times for 5th-order HAM approximations; Diamond: CPU times for the spectral sparse grid approximations [96]; Solid line: the fitted formula (5-115); Dashed-line: the fitted formula (5-116).



## 第六章 全文总结

同伦分析方法是求解强非线性问题的一种强有力手段。本文,作者采用同伦分析方法分别求解了以下四类问题:(1)任意水深中的极限斯托克斯波问题。(2)任意大均布外载荷作用下的大挠度圆薄板问题。(3)大挠度后屈曲梁问题。(4)倒向型/正倒向型随机微分方程问题。有以下几点值得讨论:

(I) 众所周知,随着水深变浅和波浪的波幅增加,波浪方程的非线性会迅速增强;而且当波高接近(甚至达到)极限波高,由于奇性存在,大部分解析/数值方法会面临收敛效率很低的窘境。据作者所知,当前从未有人获得极限斯托克斯波在极浅水中( $d/\lambda < 0.005$ )的精确结果,甚至极限波浪在 $d/\lambda < 0.01$ 时的波面都未曾得到。作者在同伦分析方法框架中,通过调节收敛控制参数,成功求解了任意水深( $d/\lambda > 0.0016$ )的极限斯托克斯波问题,并获得了高精度的结果。此外,如图 2-12 所示,即使对于孤立波的极限情形,同伦分析方法依然能给出波峰含有  $120^\circ$  尖角的波面。然而像著名的 **KdV** 解, **Laitone** 二阶近似解 [103] 和 **Fenton** 的九阶近似解 [104] 却均只能给出光滑波面,这也凸显出了同伦分析方法的有效性!值得强调的是,理论上,斯托克斯波理论应适用于任何水深,因为深水/有限水深波理论和浅水波理论描述的实际上是同一种波浪。但目前人们依旧采用不同的波浪模型,如有限水深波理论,椭圆余弦波理论和孤立波理论,是因为采取不同的理论模型可极大地简化计算复杂性。而随着计算机的计算速度不断提升,统一波浪模型的重要地位将会逐渐凸显。因此,作者相信,本文采用同伦分析方法成功求解了任意水深的极限斯托克斯波并得到高精度的结果,可以为今后的研究带来一丝启发。

(II) 均布载荷作用下的大挠度圆薄板问题是固体力学中的经典问题,其最早由 **Von Kármán** [42] 于 1910 年提出。目前,以三种解法(摄动小参数法 [54, 55], 修正迭代法 [51, 57] 和内插迭代法 [59]) 尤为著名。然而,摄动法和修正迭代法虽然简便易行,却仅在小载荷情况下有效。在 1988 年,郑晓静和周又和 [60] 成功证明了内插迭代法对于任意大外均布载荷均收敛,该问题才算基本解决。在第三章,作者采用同伦分析方法对该问题进行求解,发现对于任意大均布载荷,通过调节收敛控制参数,同伦分析方法均能给出收敛的

结果。而且作者进一步证明了摄动法和修正迭代法实际上是同伦分析方法在  $c_1 = c_2 = -1$  的特例，内插迭代法为同伦分析方法在  $c_1 = -\theta$ ,  $c_2 = -1$  的一个特例。因此，摄动小参数法 [54, 55]，修正迭代法 [51, 57] 和内插迭代法 [59] 均可统一到同伦分析方法的框架中。此外，本文发现，对于任意大均布载荷，在同伦分析方法框架中，无论是摄动法的广义形式还是修正迭代法的广义形式，通过选取合适的收敛控制参数  $c_1$  和  $c_2$ ，均能得到收敛的结果。这很好地说明了收敛控制参数在大挠度圆薄板方程的求解过程中起到的重要作用。

(III) 高扬曾经提出了几个带有非凸能量的后屈曲梁模型。在第四章，作者研究了其中一个同时受轴向外压力和横向均布载荷的梁模型。高扬 [63] 曾经指出：该梁模型为多解敏感问题，一般的数值方法无法求解。在同伦分析方法框架中，本文通过调控收敛控制参数并选取合适的初始猜测解，轻易求出该问题所有的解。方法简便易行，进一步说明了同伦分析方法对于多解敏感问题的有效性。

(IV) 倒向型/正倒向型随机微分方程是金融数学中的一个热点问题。尤其在期货投资领域，当我们定下盈利目标后，求出相应的正倒向型随机微分方程的解可以帮助我们制定当前情况的投资策略。然而目前，大多数数值方法仅对低维的倒向型随机微分方程有效，只有少数几种数值方法可以求解低维的正倒向型随机微分方程，而高维正倒向型随机微分方程的研究还基本处于空白。在第五章，作者采用同伦分析方法成功求解了三种不同类型的倒向型随机微分方程和三种不同类型的正倒向型随机微分方程（其中包含一个 12 维的算例）。此外，对于同一个 6 维算例，作者发现，若达到同样的计算精度，数值算法 [96] 所需的计算时间比同伦分析方法多 3000 余倍。这清晰地凸显出同伦分析方法对于该问题的有效性。而且回顾这六个算例，可以发现，本章采取的辅助线性算子均为：

$$\mathcal{L}[u] = \frac{\partial u}{\partial t}. \quad (6-1)$$

这说明时间变量  $t$  在方程中占据主导地位。因为若我们将偏微分方程中的变量  $x$  看成常量，整个偏微分方程就变成一个关于  $t$  的一阶常微分方程，且仅含一个边界条件，选取线性算子 (6-1) 也就变得情理之中。

以上四个问题在各自领域中均是经典问题，本文通过同伦分析方法成功求解了这四个问题，并获得了很好的结果，这充分说明了同伦分析方法的独特性和有效性，并揭示了同伦分析方法的巨大潜力。



## 附录 A 公式 (2-12) - (2-14) 的详细推导

重写 (2-11), 有

$$f(\zeta) = \sum_{i=-r}^r g_i \zeta^i, \quad (\text{A-1})$$

这里:

$$\begin{cases} g_i = a_{-i} r_0^{-2i} & \text{当 } i < 0, \\ g_0 = a_0, \\ g_i = a_i & \text{当 } i > 0. \end{cases} \quad (\text{A-2})$$

注意到在自由面处,  $R = 1$ , 即  $\zeta = e^{i\theta}$ 。因此,

$$\begin{aligned} f \bar{f} &= \left( \sum_{i=-r}^r g_i \zeta^i \right) \left( \sum_{i=-r}^r g_i \zeta^{-i} \right) \\ &= \sum_{i=-r}^r g_i^2 + \sum_{k=1}^{2r} \left[ \left( \zeta^k + \zeta^{-k} \right) \left( \sum_{m=k-r}^r g_m g_{m-k} \right) \right] \\ &= \sum_{i=-r}^r g_i^2 + \sum_{k=1}^{2r} \left[ 2 \left( \sum_{m=k-r}^r g_m g_{m-k} \right) \cos(k\theta) \right] \\ &= \sum_{k=0}^{2r} j_k \cos(k\theta), \end{aligned} \quad (\text{A-3})$$

这里:

$$j_0 = \sum_{i=-r}^r g_i^2, \quad j_k = 2 \sum_{m=k-r}^r g_m g_{m-k}, \quad k = 1, 2, \dots, 2r. \quad (\text{A-4})$$

此外,

$$\begin{aligned} \int_0^\theta \text{Im}[f] d\theta &= \int_0^\theta \left[ \sum_{k=1}^r a_k (1 - r_0^{2k}) \sin(k\theta) \right] d\theta \\ &= \sum_{k=1}^r \frac{a_k (1 - r_0^{2k})}{k} - \sum_{k=1}^r \left[ \frac{a_k (1 - r_0^{2k})}{k} \cos(k\theta) \right] \\ &= \sum_{k=0}^r h_k \cos(k\theta), \end{aligned} \quad (\text{A-5})$$

这里：

$$h_0 = \sum_{n_1=1}^r \frac{a_{n_1} (1 - r_0^{2n_1})}{n_1}, \quad h_n = -\frac{a_n (1 - r_0^{2n})}{n}, \quad n = 1, 2, \dots, r. \quad (\text{A-6})$$

则

$$\begin{aligned} & f \bar{f} \int_0^\theta \text{Im}[f] d\theta \\ &= \left[ \sum_{k=0}^{2r} j_k \cos(k\theta) \right] \left[ \sum_{k=0}^r h_k \cos(k\theta) \right] \\ &= \left( j_0 h_0 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^r j_n h_n \right) + \mathcal{N}_1 \cos \theta + \mathcal{N}_2 \cos(2\theta) + \dots, \quad (\text{A-7}) \end{aligned}$$

这里  $\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2, \dots, \mathcal{N}_k$  均由 (2-13) 定义。

## 附录 B 证明公式 (5-88)

这里, 我们将利用第二数学归纳法证明公式 (5-88):

$$\varphi_i = \frac{t^i}{i!} \sin\left(x + \frac{i}{2}\pi\right), \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{B-1})$$

当  $i = 0$  时,  $\varphi_0 = \sin(x)$  满足 (B-1)。假定当  $0 \leq i \leq k$ , 有

$$\varphi_i = \frac{t^i}{i!} \sin\left(x + \frac{i}{2}\pi\right) = \mathcal{D}_i [\sin(tq + x)], \quad i = 0, 1, 2, \dots, k, \quad (\text{B-2})$$

这里  $\mathcal{D}_i$  为同伦求导算子, 定义请见 (2-20)。此外, 易知:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_i [\cos(tq + x)] &= \frac{t^i}{i!} \cos\left(x + \frac{i\pi}{2}\right), \\ \mathcal{D}_i [\cos(2tq + 2x)] &= \frac{(2t)^i}{i!} \cos\left(2x + \frac{i\pi}{2}\right). \end{aligned} \quad (\text{B-3})$$

且根据 [31], 有

$$\begin{aligned} &\mathcal{D}_m \left[ \prod_{i=1}^j \alpha_i(q) \right] \\ &= \sum_{r_1=0}^m \mathcal{D}_{m-r_1} [\alpha_1] \sum_{r_2=0}^{r_1} \mathcal{D}_{r_1-r_2} [\alpha_2] \cdots \sum_{r_{j-1}=0}^{r_{j-2}} \mathcal{D}_{r_{j-2}-r_{j-1}} [\alpha_{j-1}] \mathcal{D}_{r_{j-1}} [\alpha_j]. \end{aligned} \quad (\text{B-4})$$

我们把 (B-2), (B-3) 代入到 (5-81) 中, 可得:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial t} (\varphi_{k+1} - \chi_{k+1} \varphi_k) \\
= & - \left\{ \frac{\partial \varphi_k}{\partial t} - \frac{t^k}{k!} \cos \left( x + \frac{k}{2} \pi \right) \right. \\
& + \mathcal{D}_k \left[ \sin(tq + x) \sin(tq + x) \cos(tq + x) \right. \\
& + \frac{1}{2} \cos(tq + x) \sin(tq + x) \sin(tq + x) \sin(tq + x) \cos(tq + x) \\
& - \frac{1}{4} \cos(2tq + 2x) \sin(tq + x) \sin(tq + x) \sin(tq + x) \\
& - \frac{1}{4} \sin(tq + x) \sin(tq + x) \sin(tq + x) \\
& \left. \left. - \cos(tq + x) \sin(tq + x) \sin(tq + x) \right] \right\} \\
= & - \left\{ \frac{\partial \varphi_k}{\partial t} - \frac{t^k}{k!} \cos \left( x + \frac{k}{2} \pi \right) + \mathcal{D}_k [0] \right\} \\
= & \frac{t^k}{k!} \sin \left( x + \frac{k+1}{2} \pi \right) - \frac{\partial \varphi_k}{\partial t}.
\end{aligned} \tag{B-5}$$

则:

$$\frac{\partial \varphi_{k+1}}{\partial t} = (\chi_{k+1} - 1) \frac{\partial \varphi_k}{\partial t} + \frac{t^k}{k!} \sin \left( x + \frac{k+1}{2} \pi \right) = \frac{t^k}{k!} \sin \left( x + \frac{k+1}{2} \pi \right).$$

利用 (5-82), 易得:

$$\varphi_{k+1} = \frac{t^{k+1}}{(k+1)!} \sin \left( x + \frac{k+1}{2} \pi \right). \tag{B-6}$$

故 (B-1) 对所有  $k \in N$  均成立, 得证!

## 参考文献

- [1] MICHELL J H. The highest waves in water[J]. *Philos. Mag.*, 1893, 36(5):430–437.
- [2] NEKRASOV A I. On Stokes' wave[J]. *Isv. Ivanovo-Voznesesk. Politekhn.*, 1920:81–89.
- [3] YAMADA H. Highest waves of permanent type on the surface of deep water[J]. *Appl. Mech. Res. Rep.*, Kyushu Univ., 1957, 5(18):37–52.
- [4] YAMADA H, SHIOTANI T. On the Highest Water Waves of Permanent Type[J]. *Modern Healthcare*, 1968, 34(38):17.
- [5] SCHWARTZ L W. Analytic continuation of Stokes' expansion for gravity waves[D].[S.l.]: Stanford University, 1972.
- [6] SCHWARTZ L W. Computer extension and analytic continuation of Stokes' expansion for gravity waves[J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 1974, 62(3):553–578.
- [7] LONGUET-HIGGINS M S, FENTON J D. On the Mass, Momentum, Energy and Circulation of a Solitary Wave. II[J]. *Proceedings of the Royal Society A Mathematical Physical & Engineering Sciences*, 1974, A340:471–493.
- [8] LONGUET-HIGGINS M S. Integral Properties of Periodic Gravity Waves of Finite Amplitude[J]. *Proceedings of the Royal Society of London*, 1975, 342(1629):157–174.
- [9] BYATT-SMITH J G B, LONGUET-HIGGINS M S. On the Speed and Profile of Steep Solitary Waves[J]. *Proceedings of the Royal Society A*, 1976, 350(1661):175–189.
- [10] COKELET E D. Steep Gravity Waves in Water of Arbitrary Uniform Depth[J]. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 1977, 286(1335):183–230.

- [11] VANDEN-BROECK J, SCHWARTZ L W. Numerical computation of steep gravity waves in shallow water[J]. *Physics of Fluids*, 1979, 22(10):1868–1871.
- [12] RIENECKER M M, FENTON J D. A Fourier approximation method for steady water waves[J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 1981, 104(104):119–137.
- [13] WILLIAMS J M. Limiting Gravity Waves in Water of Finite Depth[J]. *Philosophical Transactions of the Royal Society A Mathematical Physical & Engineering Sciences*, 1981, 302(1466):139–188.
- [14] SCHWARTZ L W, FENTON J D. Strongly Nonlinear Waves[J]. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 1982, 14:39–60.
- [15] HUNTER J K, VANDENBROECK J M. Accurate computations for steep solitary waves[J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 1983, 136(136):63–71.
- [16] MCINTYRE M E. A note on the divergence effect and the Lagrangian-mean surface elevation in periodic water waves[J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 1988, 189(189):235–242.
- [17] FENTON J D. The numerical solution of steady water wave problem[J]. *Computers & Geosciences*, 1988, 14(3):357–368.
- [18] CHEN Y S, T T. Optimization Solution of Stokes Waves[J]. *Journal of Hydrodynamics*, 1989, 4(4):122–125.
- [19] FENTON J D. Nonlinear Wave Theories[J]. *Ocean Engineering Science*, 1990, 9:1–18.
- [20] KLOPMAN G. A note on integral properties of periodic gravity waves in the case of a non-zero mean Eulerian velocity[J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 1990, 211(5):609–615.
- [21] VANDEN-BROECK J M, MILOH T. Computations of Steep Gravity Waves by a Refinement of Davies–Tulin’s Approximation[J]. *Siam Journal on Applied Mathematics*, 1995, 55(4):892–903.

- [22] KARABUT E A. An approximation for the highest gravity waves on water of finite depth[J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 1998, 372:45–70.
- [23] DYACHENKO S A, LUSHNIKOV P M, KOROTKEVICH A O. Complex Singularity of a Stokes Wave[J]. *Jetp Letters*, 2014, 98(11):675–679.
- [24] LUSHNIKOV P M, DYACHENKO S A, D A S. New conformal mapping for adaptive resolving of the complex singularities of Stokes wave.[J]. *Proceedings of the Royal Society A*, 2017, 473. ( DOI: 10.1098/rspa.2017.0198).
- [25] STOKES G G. On the Theory of Oscillatory Waves[J]. *Trans Cambridge Philos Soc*, 1847, 8:441–455.
- [26] STOKES G G. Supplement to a paper on the theory of oscillatory waves[J]. *Mathematical & Physical Papers*, 1880(1):314–326.
- [27] SHANKS D. Non-linear Transformations of Divergent and Slowly Convergent Sequences[J]. *Journal of Mathematics & Physics*, 1954, 34(1):1–42.
- [28] DALLASTON M C, MCCUE S W. Accurate series solutions for gravity-driven Stokes waves[J]. *Physics of Fluids*, 2010, 22(8).
- [29] LIAO S J. A Uniformly Valid Analytic Solution of 2D Viscous Flow Past a Semi-Infinite Flat Plate[J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 1999, 385:101–128.
- [30] LIAO S J. Beyond perturbation: introduction to the homotopy analysis method[M]. Boca Raton: CHAPMAN & HALL/CRC, 2003.
- [31] LIAO S J. Homotopy Analysis Method in Nonlinear Differential Equations[M]. New York: Springer-Verlag, 2011.
- [32] 廖世俊. 超越摄动: 同伦分析方法基本思想及其应用 [J]. *力学进展*, 2008, 38:1–34.
- [33] VAN GORDER R A, VAJRAVELU K. Analytic and numerical solutions to the Lane-Emden equation[J]. *Physics Letters A*, 2008, 372:6060–6065.

- [34] MASTROBERARDINO A. Homotopy analysis method applied to electrohydrodynamic flow[J]. *Communications in Nonlinear Science & Numerical Simulation*, 2011, 16(7):2730–2736.
- [35] KIMIAEIFAR A, LUND E, THOMSEN O T, et al. Application of the homotopy analysis method to determine the analytical limit state functions and reliability index for large deflection of a cantilever beam subjected to static co-planar loading[J]. *Computers & Mathematics with Applications*, 2011, 62(12):4646–4655.
- [36] VAJRAVELU K, VAN GORDER R A. *Nonlinear Flow Phenomena and Homotopy Analysis: Fluid Flow and Heat Transfer*[M]. Heidelberg: Springer, 2012.
- [37] XU D L, LIN Z L, LIAO S J, et al. On the steady-state fully resonant progressive waves in water of finite depth[J]. *J. Fluid Mech.*, 2012, 710:379–418.
- [38] LIU Z, LIAO S J. Steady-state resonance of multiple wave interactions in deep water[J]. *J. Fluid Mech.*, 2014, 742:664–700.
- [39] LIU Z, XU D L, LI J, et al. On the existence of steady-state resonant waves in experiments[J]. *J. Fluid Mech.*, 2015, 763:1–23.
- [40] SARDANYÉS J, RODRIGUES C, JANUÁRIO C, et al. Activation of effector immune cells promotes tumor stochastic extinction: A homotopy analysis approach[J]. *Appl. Math. Comput.*, 2015, 252:484 – 495.
- [41] LIAO S J, XU D L, STIASSNIE M. On the steady-state nearly resonant waves[J]. *J. Fluid Mech.*, 2016, 794:175–199.
- [42] THEODORE V K. Festigkeits problem in maschinenbau[J]. *Encycl. Der math. Wiss.*, 1910, 4:348–351.
- [43] WAY S. Bending of circular plate with large deflection[J]. *ASME Trans. Appl. Mech.*, 1934, 56:627–636.
- [44] CHIEN W Z. Asymptotic behavior of a thin clamped circular plate under uniform normal pressure at very large deflection[J]. *Sci. Rep. Natl. TsingHua Univ.*, 1948, 5:1–24.



- [45] DADEPPO D A, SCHMIDT R. Moderately large deflections of a loosely clamped circular plate under a uniformly distributed load[J]. *Indus. Math.*, 1975, 25:17–28.
- [46] SIMMONDS J G. Axisymmetric solution of the Von Kármán plate equation for Poisson's ratio one-third[J]. *ASME J. of Appl. Mech.*, 1983, 50(4a):897–898.
- [47] ZHENG X J, ZHOU Y H. Exact solution to large deflection of circular plates under compound loads[J]. *Sci. China*, 1987, 4:391–404.
- [48] ZHENG J J, ZHOU X Z. A new numerical method for axisymmetrical bending of circular plates with large deflection[J]. *Key Eng. Mater.*, 2007, 353-358:2699–2702.
- [49] ZHENG X J, LEE J S. On the convergence of the Chien's perturbation method for Von Kármán plate equations[J]. *Int. J. Eng. Sci.*, 1995, 33:1085–1094.
- [50] MAHMOUD N, AL-GAHTANI H J. RBF-based meshless method for large deflection of thin plates[J]. *Eng. Anal. Bound. Elem.*, 2007, 31:311–317.
- [51] ZHENG X J. Large deflection theory of circular thin plate and its application[M]. Jilin: Jilin Science Technology Press, 1990.
- [52] CHIEN W Z, YEH K Y. On the Large deflection of circular plate[J]. *China Sci.*, 1954, 10(3):209–236.
- [53] HU H C. On the large deflection of a circular plate under combined action of uniformly distributed load and concentrated load at the centre[J]. *Phys. Sin.*, 1954, 10(4):383–392.
- [54] VINCENT J J. The bending of a thin circular plate[J]. *Phil. Mag.*, 1931, 12:185–196.
- [55] CHIEN W Z. Large deflection of a circular clamped plate under uniform pressure[J]. *Chinese J. Phys.*, 1947, 7:102–113.

- [56] CHEN S L, KUANG J C. The perturbation parameter in the problem of large deflection of clamped circular plates[J]. *Appl. Math. and Mech. (English Edition)*, 1981, 2(1):137–154.
- [57] YEH K Y, LIU R H, S L LI, et al. Nonlinear stabilities of thin circular shallow shells under actions of axisymmetrical uniformly distributed line loads[J]. *J. Lanzhou Univ. (Natural Science)*, 1965, 18(2):10–33.
- [58] ZHOU Y H. On relations between the modified-iterative method and Chien's perturbation solution[J]. *Appl. Math. and Mech.*, 1989, 10(1):59–70.
- [59] KELLER H B, REISS E L. Iterative solutions for the non-linear bending of circular plates[J]. *Commun. Pur. Appl. Math.*, 1958:273–292.
- [60] ZHENG X J, ZHOU Y H. On the convergence of the nonlinear equations of circular plate with interpolation iterative method[J]. *Chinese. Sci. A*, 1988, 10:1050–1058.
- [61] GAO D Y. Nonlinear elastic beam theory with application in contact problems and variational approaches[J]. *Mech. Res. Commun.*, 1996, 23(1):11–17.
- [62] GAO D Y. Dual extremum principles in finite deformation theory with applications in post-buckling analysis of nonlinear beam model[J]. *Appl. Mech. Reviews*, 1997, 50(11):64–71.
- [63] GAO D Y. Finite deformation beam models and triality theory in dynamical post-buckling analysis[J]. *Int. J. Non-Linear Mechanics*, 2003, 5:103–131.
- [64] PARDOUX E, PENG S G. Adapted solution of a backward stochastic differential equation[J]. *Systems Control Lett.*, 1990, 14(1):55–61.
- [65] PENG S G. Probabilistic interpretation for systems of quasilinear parabolic partial differential equations[J]. *Stochastics*, 1991, 37:61–74.
- [66] PENG S G. A nonlinear Feynman-Kac formula and applications, Control theory, stochastic analysis and applications[J]. *World Sci. Publ., River Edge, NJ*, 1991:173–184.

- [67] PARDOUX E, PENG S G. Backward doubly stochastic differential equations and systems of quasilinear SPDEs[J]. Probab. Theory Relat. Fields, 1994, 98(0):209–227.
- [68] PARDOUX E, TANG S J. Forward-backward stochastic differential equations and quasilinear parabolic PDEs[J]. Probab. Theory Relat. Fields, 1999, 114:123–150.
- [69] PENG S G. A generalized dynamic programming principle and Hamilton-Jacobi-Bellman equation[J]. Stochastics, 1992, 38(2):119–134.
- [70] PENG S G. Backward stochastic differential equations and applications to optimal control[J]. Appl. Math. Optim., 1993, 27(2):125–144.
- [71] EL KAROUI N, PENG S G, QUENEZ M C. Backward stochastic differential equations in finance[J]. Mathematical Finance, 1997, 7(1):1–71.
- [72] PENG S G. Monotonic limit theorem of BSDE and nonlinear decomposition theorem of DoobMeyer's type[J]. Probab. Theory Related Fields, 1999, 113(4):473–499.
- [73] PENG S G. The backward stochastic differential equations and its applications[J]. Advances in Mathematics, 1997, 26(2):97–112.
- [74] CHERIDITO P, SONER H M, TOUZI N, et al. Second-order backward stochastic differential equations and fully nonlinear parabolic PDEs[J]. Communications on Pure and Applied Mathematics, 2007, 60(7):1081–1110.
- [75] SONER H M, TOUZI N, ZHANG J. Wellposedness of second order backward SDEs[J]. Probability Theory and Related Fields, 2012, 153(1-2):149–190.
- [76] TAO K, ZHAO W D, ZHOU T. High order numerical schemes for second-order FBSDEs with applications to stochastic optimal control[J]. arXiv:1502.03206, 2015.
- [77] BINMORE K G, DAVIES J. Calculus: Concepts and Methods[M]. [S.l.]: Cambridge University Press, 2002.

- [78] MA J, YONG J M. Forward-backward Stochastic Differential Equations and Their Applications[M]. Lecture Notes in Mathematics, vol. 1702. Berlin: Springer-Verlag, 1999.
- [79] MA J, ZHANG J F. Representation theorems for backward stochastic differential equations[J]. Ann. Appl. Probab., 2002, 12:1390–1418.
- [80] MILSTEIN G N, TRETYAKOV M V. Discretization of forward-backward stochastic differential equations and related quasi-linear parabolic equations[J]. IMA J. Numer. Anal., 2007, 27:24–44.
- [81] BALLY V. Approximation Scheme for Solutions of BSDE[J]. Pitman Res. Notes Math. Ser., 1997:177–191.
- [82] CHEVANCE D. Numerical methods for backward stochastic differential equations[J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 1997, 47(1):1–16.
- [83] PENG S G. A linear approximation algorithm using BSDE[J]. Pacific Economic Review, 1999, 4(3):285–291.
- [84] BOUCHARD B, TOUZI N. Discrete-time approximation and Monte-Carlo simulation of backward stochastic differential equations[J]. Stochastic Processes and Their Applications, 2004, 111(2):175–206.
- [85] ZHANG J. A numerical scheme for BSDEs[J]. Annals of Applied Probability, 2004, 14(1):459–488.
- [86] GOBET E, WARIN X. A Regression-Based Monte-Carlo Method to Solve Backward Stochastic Differential Equations[J]. Annals of Applied Probability, 2005, 15(3):2172–2202.
- [87] BENDER C, DENK R. A forward scheme for backward SDEs[J]. Stochastic Processes and Their Applications, 2007, 117(12):1793–1812.
- [88] ZHAO W D, WANG J L, PENG S G. Error estimates of the  $\theta$ -scheme for backward stochastic differential equations[J]. Discrete and Continuous Dynamical Systems - Series B, 2009, 12(4):905–924.

- [89] ZHAO W D, FU Y, ZHAO T. New kinds of high-order multistep schemes for coupled forward backward stochastic differential equations[J]. *SIAM J. Sci. Comput.*, 2014, 36(4):1731–1751.
- [90] MA J, PROTTER P, YONG J M. Solving forward-backward stochastic differential equations explicitly – a four step scheme[J]. *Probab. Theory Related Fields*, 1994, 98:339–359.
- [91] DOUGLAS J, PROTTER P. Numerical Methods for Forward-Backward Stochastic Differential Equations[J]. *Annals of Applied Probability*, 1996, 6(3):940–968.
- [92] DELARUE F, MENOZZI S. A Forward-Backward Stochastic Algorithm For Quasi-Linear PDEs[J]. *Annals of Applied Probability*, 2006, 16(1):140–184.
- [93] CHOW G C. *Dynamic Economics: Optimization by the Lagrange Method*[M].[S.l.]: Oxford University Press, 1997.
- [94] ZHAO W D, CHEN L F, PENG S G. A New Kind of Accurate Numerical Method for Backward Stochastic Differential Equations[J]. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 2006, 28(4):1563–1581.
- [95] GUO W, ZHANG J, ZHUO J. A monotone scheme for high-dimensional fully non-linear PDEs[J]. *Annals of Applied Probability*, 2012, 25(3):págs. 1540–1580.
- [96] FU Y, ZHAO W D, ZHOU T. Efficient spectral sparse grid approximations for solving multi-dimensional forward backward SDEs[J]. *arXiv:1607.06897v1*, 2016.
- [97] AMICK C J, FRAENKEL L E, TOLAND J F. On the Stokes conjecture for the wave of extreme form[J]. *Acta Mathematica*, 1982, 148(1):193–214.
- [98] PLOTNIKOV P I. A Proof of the Stokes Conjecture in the Theory of Surface Waves \* [J]. *Studies in Applied Mathematics*, 2002, 108(2):217–244. translated from *Dinamika Sploshn. Sredy* 57 (1982), 41-76.
- [99] HEDGES T S. Regions of validity of analytical wave theories[J]. *Ice Proceedings Water Maritime & Energy*, 1995, 112(2):111–114.

- [100] LENAU C W. The solitary wave of maximum amplitude[J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 1966, 26(2):309–320.
- [101] WITTING J M. High solitary waves in water: Results of calculations[J]. *NRL Rep.*, 1981.
- [102] WITTING J M, BERGIN J M. High Solitary Waves in Water: A Refined Numerical Method[J]. *NRL Rep.*, 1981.
- [103] LAITONE E V. The second approximation to cnoidal and solitary waves[J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 1960, 9(3):430–444.
- [104] FENTON J D. A ninth-order solution for the solitary wave[J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 1972, 53(2):257–271.
- [105] ZHONG X X, LIAO S J. Analytic Solutions of Von Kármán Plate under Arbitrary Uniform Pressure – Equations in Differential Form[J]. *Stud. Appl. Math.*, 2017, 138:371–400.
- [106] SANTOS H A F A, GAO D Y. Canonical dual finite element method for solving post-buckling problems of a large deformation elastic beam[J]. *Int J Nonlin Mech*, 2012, 47:240–247.
- [107] 彭实戈. 倒向随机微分方程及其应用 [J]. *数学进展*, 1997, 26:97–112.

## 致 谢

时光飞逝，转眼间这已是在上海交通大学的第七个年头。在老师、亲人和朋友的支持和帮助下，既学习了知识，收获了快乐，也对自己有了更清晰的认识。在此，我要向我的老师、亲人和朋友表示深深的感谢。

感谢我的导师廖世俊教授指引我走上科研的道路，并一直鼓励我、支持我、帮助我。这几年，我对自己未来的方向时常感到迷茫犹豫，遇到困难，也曾想过放弃。但每当自己有些消极情绪时，却总会想起廖老师的两句经典语句“遇山开山，遇水架桥，困难总是要解决的”，“做的东西要有价值，为人类做点贡献”。在我今后的道路上，这两句话也将指引我一直向前。此外，感谢廖老师不仅倾心培养我成为一名合格的科研人员，还教会我要呵护家人，热爱工作。这几年，受益良多。

感谢崔继峰师兄、徐姐莉师姐、刘曾师兄、李晓明师兄、李晓晨师姐、李靖师兄、李娇娇师姐、俞强师兄、杨兆臣师兄、杨小岩师姐、李季阳、秦石洁、胡天立。在实验室的日子里，受到诸位师兄、师姐、师弟的颇多照顾，在此表示深深的感谢。感谢汪淳老师、徐航老师和林志良老师的支持与帮助。感谢王建华博士的技术支持。

感谢这几年陪伴我的好友黄柳楠、张圆斌、郑皓晖和李啸雨。最后，感谢我的父母和家人，无论我做何决定，你们始终相信我、支持我，你们的信任与支持是我前进的最大动力。





## 攻读学位期间发表的学术论文目录

- [1] XIAO-XU ZHONG, SHI-JUN LIAO. Analytic Solutions of Von Kármán Plate under Arbitrary Uniform Pressure – Equations in Differential Form[J]. **Studies in Applied Mathematics**, 2017, 138: 371-400. (<http://dx.doi.org/10.1111/sapm.12158>)
- [2] XIAO-XU ZHONG, SHI-JUN LIAO. Analytic Solutions of Von Kármán Plate under Arbitrary Uniform Pressure – Equations in Integral Form[J]. **Science China Physics, Mechanics & Astronomy**, 2018, 61(1):014611. (<http://engine.scichina.com/doi/10.1007/s11433-017-9096-1>)
- [3] XIAO-XU ZHONG, SHI-JUN LIAO. On the homotopy analysis method for backward/forward-backward stochastic differential equations[J]. **Numerical Algorithms**, 2017, 76: 487-519. (<http://dx.doi.org/10.1007/s11075-017-0268-2>)
- [4] XIAO-XU ZHONG, SHI-JUN LIAO. On the Limiting Stokes' Wave of Extreme Height in Arbitrary Water Depth[J]. **Submitted to Journal of Fluid Mechanics**. (<https://arxiv.org/abs/1709.02151v1>)
- [5] XIAO-XU ZHONG, YANG-GAO DAVID, SHI-JUN LIAO. HAM approach for post-buckling problems of a large deformed elastic beam[J]. **Submitted to Computers & Mathematics with Application**. ([https://www.researchgate.net/profile/Xiaoxu\\_Zhong/contributions](https://www.researchgate.net/profile/Xiaoxu_Zhong/contributions))