

© 2026 г.

Ши-Цзюнь Ляо<sup>\*†</sup>

## ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ИНВАРИАНТНОСТИ ОТНОСИТЕЛЬНО ПРОСТРАНСТВЕННОЙ СИММЕТРИИ ДЛЯ ДВУМЕРНОГО ПОТОКА КОЛМОГОРОВА

Доказана теорема, согласно которой точное решение двумерного течения Колмогорова, описываемого уравнениями Навье–Стокса с периодическими граничными условиями, сохраняет ту же пространственную симметрию, что и начальное условие, навсегда, т. е. при всех  $t \geq 0$ . Эта теорема может быть использована в качестве абсолютной шкалы для проверки корректности и надежности численного моделирования турбулентности Навье–Стокса. Обнаружено, что все представленные результаты для турбулентности Навье–Стокса, полученные методом чистого численного моделирования (CNS), сохраняют пространственную симметрию начального условия на протяжении всего временного интервала моделирования, тогда как все соответствующие результаты прямого численного моделирования (DNS) быстро теряют пространственную симметрию. Другими словами, результаты DNS нарушают доказанную теорему. Тем самым теорема подтверждает, что пространственно-временные траектории турбулентности Навье–Стокса, полученные с помощью DNS, действительно быстро сильно загрязняются шумами численных расчетов, а также демонстрирует, что CNS может внести полезный вклад в углубление нашего понимания турбулентности, поскольку раскрывает математические основы и реалии турбулентности в наносекундном диапазоне.

**Ключевые слова:** турбулентность Навье–Стокса, течение Колмогорова, пространственная симметрия, CNS, DNS.

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf11228>

---

Данная работа была частично поддержана National Natural Science Foundation of China (грант № 12521002).

---

<sup>\*</sup>State Key Laboratory of Ocean Engineering, Shanghai, China

<sup>†</sup>School of Ocean and Civil Engineering, Shanghai Jiao Tong University, China.

E-mail: sjliao@sjtu.edu.cn

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Лоренц, который в 1963 г. в работе [1] впервые сформулировал знаменитый эффект бабочки для хаоса [2]–[5], в 2006 г. обнаружил, что численные ошибки могут оказывать существенное влияние на глобальные свойства хаотических систем [6], поскольку вследствие эффекта бабочки неизбежные вычислительные погрешности как небольшие искусственные возмущения экспоненциально возрастают до макроуровня. Следует отметить, что турбулентность Навье–Стокса (НС) [7]–[10] (т. е. турбулентность, описываемая уравнениями НС) является хаотической [11]–[15]. При этом во всех традиционных численных алгоритмах, включая даже прямое численное моделирование (direct numerical simulation, DNS) [16]–[20] уравнений НС, численные шумы неизбежны. Таким образом, если рассуждать логически, в силу эффекта бабочки в хаотической системе численные шумы DNS в турбулентности НС должны быстро достигать макроуровня, что, безусловно, должно привести к заметному отклонению вычисленной траектории от точного решения уравнений НС. Следовательно, прямое численное моделирование турбулентности НС должно быстро и сильно загрязняться шумами численных расчетов.

Результаты DNS общепринято считать наиболее точными, и они довольно долго использовались в качестве эталонного решения для турбулентных потоков [16]–[20], поэтому для исследования точности и достоверности DNS невозможно использовать традиционные алгоритмы. В 2009 г. мы предложили [21] так называемое чистое численное моделирование (clean numerical simulation, CNS) для преодоления ограничений традиционных численных алгоритмов анализа хаоса и турбулентности. Этот метод получил свое развитие в работах [22]–[33]. В отличие от DNS, шумы CNS можно строго рассматривать как пренебрежимо малые в конечном временном интервале, который, однако, достаточно велик для расчета надежной статистики. Это происходит за счет уменьшения как ошибки аппроксимации, так и ошибки округления до требуемого достаточно малого уровня [21]–[33]. Следует отметить, что в результате использования CNS число обнаруженных периодических орбит известных плоских задач трех тел увеличилось на несколько порядков [24]–[26]; это хороший пример, иллюстрирующий потенциал и возможности этого метода. Таким образом, CNS может дать очень точную пространственно-временную траекторию уравнений НС на конечном, но достаточно большом интервале времени. Эта траектория очень близка к точному решению, т. е. к истине и реальности турбулентности НС.

Следует отметить, что численные шумы CNS значительно меньше, чем шумы DNS. Поэтому результаты CNS можно использовать в качестве эталонного решения для проверки корректности и надежности DNS. В работах [31], [32] были приведены некоторые результаты сравнения CNS и DNS для двумерного несжимаемого турбулентного течения Колмогорова: было показано, что численное решение, полученное с помощью CNS, сохраняет ту же пространственную симметрию на протяжении всего временного интервала моделирования, что и соответствующие начальные условия, тогда как соответствующие результаты DNS сохраняют эту пространственную симметрию только в начале, но затем быстро теряют ее. Возникает вопрос: какой из подходов раскрывает истину и реальность турбулентности НС?

В настоящей работе мы доказываем теорему о том, что точное решение двумерного потока Колмогорова, рассмотренного в работах [31], [32], должно сохранять ту

же пространственную симметрию, что и его начальное условие, навсегда, т. е. при всех  $t \geq 0$ . Результаты CNS [31], [32] хорошо согласуются с этой математической теоремой и, таким образом, подтверждают реальность, при этом соответствующие результаты DNS быстро теряют пространственную симметрию, и теорема нарушается. Это ясно подтверждает, что результаты DNS в самом деле за короткое время сильно искажаются шумами численных расчетов и заметно отклоняются от точного решения. Подробные математические доказательства приведены в разделе 2, заключительные замечания и обсуждения – в разделе 3.

## 2. ИНВАРИАНТНОСТЬ ПОТОКА КОЛМОГОРОВА ОТНОСИТЕЛЬНО ПРОСТРАНСТВЕННОЙ СИММЕТРИИ

Рассмотрим двумерное несжимаемое течение Колмогорова [34]–[36] в квадратной области под действием так называемого колмогоровского возбуждения. Это течение управляется безразмерным уравнением НС для функции тока:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla^2 \psi) + \psi_x \nabla^2 \psi_y - \psi_y \nabla^2 \psi_x - \frac{1}{\text{Re}} \nabla^4 \psi + n_k \cos(n_k y) = 0, \quad (1)$$

где  $\psi$  – функция тока,  $t$  – время,  $x, y \in [0, 2\pi]$  – горизонтальная и вертикальная координаты в системе координат  $xOy$ ,  $\text{Re}$  – число Рейнольдса,  $n_k$  – четное число, задающее масштаб колмогоровского возбуждения,  $\nabla^2$  – оператор Лапласа и  $\nabla^4 = \nabla^2 \nabla^2$ . Функция тока  $\psi$  удовлетворяет периодическому граничному условию

$$\psi(x, y, t) = \psi(x \pm 2\pi, y, t) = \psi(x, y \pm 2\pi, t). \quad (2)$$

В настоящей работе мы рассматриваем гладкое начальное условие  $\psi(x, y, 0)$ , содержащее пространственную вращательную симметрию,

$$\psi(x, y, 0) = \psi(2\pi - x, 2\pi - y, 0) \quad (3)$$

и/или трансляционную симметрию

$$\psi(x, y, 0) = \psi(x + \pi, y + \pi, 0). \quad (4)$$

Введем функции

$$\psi^{(m)}(x, y, t) = \frac{1}{m!} \frac{\partial^m \psi(x, y, t)}{\partial t^m}, \quad \psi^{(0)}(x, y, t) = \psi(x, y, t). \quad (5)$$

Предположим, что функцию  $\psi(x, y, t)$  можно разложить в ряд Тейлора по  $t$  в точке  $t = t_0 \in [0, +\infty)$  с радиусом сходимости  $\rho > 0$ , а именно

$$\psi(x, y, t) = \psi(x, y, t_0) + \sum_{m=1}^{+\infty} \psi^{(m)}(x, y, t_0)(t - t_0)^m = \sum_{m=0}^{+\infty} \psi^{(m)}(x, y, t_0)(t - t_0)^m, \quad (6)$$

где  $|t - t_0| < \rho$ . Тогда уравнение (1) можно переписать как

$$\nabla^2 \psi^{(1)}(x, y, t) + \psi_x^{(0)} \nabla^2 \psi_y^{(0)} - \psi_y^{(0)} \nabla^2 \psi_x^{(0)} - \frac{1}{\text{Re}} \nabla^4 \psi^{(0)} + n_k \cos(n_k y) = 0. \quad (7)$$

Рассмотрим еще одну систему координат  $x'O'y'$ , где для вращений

$$x' = 2\pi - x, \quad y' = 2\pi - y \quad (8)$$

и для трансляций

$$x' = \pi + x, \quad y' = \pi + y. \quad (9)$$

Пусть  $\psi'(x', y', t)$  – решение уравнения (1) в новых координатах,

$$\nabla'^2 \psi'^{(1)} + \psi'_{x'} \nabla'^2 \psi'_{y'} - \psi'_{y'} \nabla'^2 \psi'_{x'} - \frac{1}{\text{Re}} \nabla'^4 \psi' + n_K \cos(n_K y') = 0, \quad (10)$$

с периодическим граничным условием и начальным условием  $\psi'(x', y', 0)$ . Если существует пространственная вращательная симметрия (3) или трансляционная симметрия (4) начального решения, то  $\psi'(x', y', 0) = \psi(x, y, 0)$ .

**ЛЕММА 1** (ковариантность оператора). Пусть целое четное число  $n_K \geq 2$ , гладкие функции  $f$  и  $g$  обладают пространственной симметрией  $f(x, y, t) = f'(x', y', t)$  и  $g(x, y, t) = g'(x', y', t)$ . Тогда в случаях (8) и (9) имеют место равенства

$$\cos(n_K y) = \cos(n_K y'), \quad \nabla^2 = \nabla'^2, \quad \nabla^4 = \nabla'^4, \quad \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial f'}{\partial x'} \frac{\partial g'}{\partial y'}. \quad (11)$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** В случае (8) имеем

$$\begin{aligned} \cos(n_K y') &= \cos(2n_K \pi - n_K y) = \cos(n_K y), \\ \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x'}, & \frac{\partial}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial y'}, \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} &= -\frac{\partial}{\partial x'} \left( -\frac{\partial}{\partial x'} \right) = \frac{\partial^2}{\partial x'^2}, & \frac{\partial^2}{\partial y^2} &= -\frac{\partial}{\partial y'} \left( -\frac{\partial}{\partial y'} \right) = \frac{\partial^2}{\partial y'^2}, \end{aligned}$$

в результате

$$\begin{aligned} \nabla^2 &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2}{\partial y'^2} = \nabla'^2, \\ \nabla^4 &= \nabla^2 \nabla^2 = \nabla'^2 \nabla'^2 = \nabla'^4 \end{aligned}$$

и

$$\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial y} = \left( -\frac{\partial f'}{\partial x'} \right) \left( -\frac{\partial g'}{\partial y'} \right) = \frac{\partial f'}{\partial x'} \frac{\partial g'}{\partial y'}$$

для гладких функций  $f, g$  с пространственной симметрией  $f = f', g = g'$ .

Аналогично в случае (9) имеем

$$\cos(n_K y') = \cos(n_K \pi + n_K y) = \cos(n_K y),$$

поскольку  $n_K$  – четное число, и

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x'}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y'}, \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x'^2}, \quad \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial y'^2},$$

в результате

$$\nabla^2 = \nabla'^2, \quad \nabla^4 = \nabla'^4$$

и

$$\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial f'}{\partial x'} \frac{\partial g'}{\partial y'}$$

для гладких функций  $f, g$  с пространственной симметрией  $f = f', g = g'$ . Лемма доказана.

**ЛЕММА 2** (рекурсивная симметрия). *Для двумерного течения Колмогорова, описывающегося уравнением НС (1) (с четным числом  $n_k$ ) с периодическим граничным условием (2) и гладким начальным условием, которое обладает пространственной вращательной симметрией (3) или трансляционной симметрией (4), если его решение  $\psi(x, y, t)$  при  $t = t_0 \geq 0$  обладает пространственной вращательной или трансляционной симметрией  $\psi(x, y, t_0) = \psi'(x', y', t_0)$ , то для всех целых чисел  $m \geq 1$  имеет место пространственная симметрия  $\psi^{(m)}(x, y, t_0) = \psi'^{(m)}(x', y', t_0)$ .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО получается методом математической индукции.

Пусть  $m = 1$ . Поскольку существует пространственная симметрия при  $t = t_0$ , выполнены равенства

$$\psi'(x', y', t_0) = \psi(x, y, t_0), \quad \psi'^{(0)}(x', y', t_0) = \psi^{(0)}(x, y, t_0). \quad (12)$$

В силу (11) и (12) имеем при  $t = t_0$

$$\begin{aligned} \psi_{x'}''^{(0)} \nabla'^2 \psi_{y'}'^{(0)} - \psi_{y'}'^{(0)} \nabla'^2 \psi_{x'}'^{(0)} - \frac{1}{\text{Re}} \nabla'^4 \psi^{(0)} &= \\ = \psi_{x'}'^{(0)} (\nabla'^2 \psi'^{(0)})_{y'} - \psi_{y'}'^{(0)} (\nabla'^2 \psi'^{(0)})_{x'} - \frac{1}{\text{Re}} \nabla^4 \psi^{(0)} &= \\ = \psi_x^{(0)} (\nabla^2 \psi^{(0)})_y - \psi_y^{(0)} (\nabla^2 \psi^{(0)})_x - \frac{1}{\text{Re}} \nabla^4 \psi^{(0)} &= \\ = \psi_x^{(0)} \nabla^2 \psi_y^{(0)} - \psi_y^{(0)} \nabla^2 \psi_x^{(0)} - \frac{1}{\text{Re}} \nabla^4 \psi^{(0)}, \end{aligned}$$

тогда уравнение (10) принимает вид

$$\nabla^2 \psi'^{(1)} + \psi_x^{(0)} \nabla^2 \psi_y^{(0)} - \psi_y^{(0)} \nabla^2 \psi_x^{(0)} - \frac{1}{\text{Re}} \nabla^4 \psi^{(0)} + n_k \cos(n_k y) = 0. \quad (13)$$

Сравнивая (13) и (7), получаем для  $t = t_0$  пространственную симметрию

$$\psi'^{(1)}(x', y', t_0) = \psi^{(1)}(x, y, t_0).$$

Таким образом, лемма верна при  $m = 1$ .

Предположим, что лемма верна для  $m = 1, 2, \dots, n$ , а именно, при  $t = t_0$  существует пространственная симметрия

$$\psi'^{(i)}(x', y', t_0) = \psi^{(i)}(x, y, t_0), \quad 0 \leq i \leq n. \quad (14)$$

Теперь  $n$  раз продифференцируем уравнения (1) и (10) по  $t$  и разделим на  $n!$ , получим, что в системе координат  $xOy$

$$(n+1) \nabla^2 \psi^{(n+1)} = \frac{1}{\text{Re}} \nabla^4 \psi^{(n)} - \sum_{i=0}^n [\psi_x^{(i)} \nabla^2 \psi_y^{(n-i)} - \psi_y^{(i)} \nabla^2 \psi_x^{(n-i)}], \quad (15)$$

а в системе координат  $x'O'y'$

$$(n+1)\nabla'^2\psi'^{(n+1)} = \frac{1}{\text{Re}}\nabla'^4\psi'^{(n)} - \sum_{i=0}^n [\psi'^{(i)}_{x'}\nabla'^2\psi'^{(n-i)}_{y'} - \psi'^{(i)}_{y'}\nabla'^2\psi'^{(n-i)}_{x'}]. \quad (16)$$

В соответствии с (11) и (14) имеем при  $t = t_0$

$$\nabla'^2\psi'^{(n+1)} = \nabla^2\psi'^{(n+1)}, \quad \nabla'^4\psi'^{(n)} = \nabla^4\psi'^{(n)} \quad (17)$$

и

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n [\psi'^{(i)}_{x'}\nabla'^2\psi'^{(n-i)}_{y'} - \psi'^{(i)}_{y'}\nabla'^2\psi'^{(n-i)}_{x'}] &= \\ &= \sum_{i=0}^n [\psi'^{(i)}_{x'}(\nabla'^2\psi'^{(n-i)})_{y'} - \psi'^{(i)}_{y'}(\nabla'^2\psi'^{(n-i)})_{x'}] = \\ &= \sum_{i=0}^n [\psi^{(i)}_x(\nabla^2\psi^{(n-i)})_y - \psi^{(i)}_y(\nabla^2\psi^{(n-i)})_x] = \\ &= \sum_{i=0}^n [\psi^{(i)}_x\nabla^2\psi^{(n-i)}_y - \psi^{(i)}_y\nabla^2\psi^{(n-i)}_x]. \end{aligned} \quad (18)$$

Постановка (17) и (18) в (16) дает

$$(n+1)\nabla^2\psi'^{(n+1)} = \frac{1}{\text{Re}}\nabla^4\psi'^{(n)} - \sum_{i=0}^n [\psi^{(i)}_x\nabla^2\psi^{(n-i)}_y - \psi^{(i)}_y\nabla^2\psi^{(n-i)}_x]. \quad (19)$$

Сравнивая это выражение с (15), получаем пространственную симметрию для  $n+1$ :

$$\psi'^{(n+1)}(x', y', t_0) = \psi^{(n+1)}(x, y, t_0).$$

Таким образом, для любого целого  $m \geq 1$

$$\psi'^{(m)}(x', y', t_0) = \psi^{(m)}(x, y, t_0). \quad (20)$$

Лемма доказана.

**ЛЕММА 3** (продолжение симметрии). Для двумерного течения Колмогорова, описывающегося уравнением НС (1) (с четным числом  $n_K$ ) с периодическим граничным условием (2) и гладким начальным условием, которое обладает пространственной вращательной симметрией (3) или трансляционной симметрией (4), если его решение  $\psi(x, y, t)$  обладает пространственной симметрией  $\psi'(x', y', t_0) = \psi(x, y, t_0)$  при  $t = t_0 \geq 0$  и, кроме того, разложимо в точке  $t = t_0$  в ряд Тейлора с ненулевым радиусом сходимости  $\rho$ , то функция  $\psi(x, y, t)$  в точке  $t \in [t_0, t_0 + \rho)$  обладает той же пространственной симметрией.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Из пространственной симметрии  $\psi'(x', y', t_0) = \psi(x, y, t_0)$  по лемме 2 имеем

$$\psi'^{(m)}(x', y', t_0) = \psi^{(m)}(x, y, t_0), \quad 1 \leq m < +\infty.$$

Тогда для  $|t - t_0| < \rho$ , в частности для  $t \in [t_0, t_0 + \rho)$ ,

$$\psi'(x', y', t) = \sum_{m=0}^{+\infty} \psi^{(m)}(x', y', t_0) (t - t_0)^m = \sum_{m=0}^{+\infty} \psi^{(m)}(x, y, t_0) (t - t_0)^m = \psi(x, y, t).$$

Это гарантирует пространственную симметрию  $\psi'(x', y', t) = \psi(x, y, t)$  в любой точке  $t \in [t_0, t_0 + \rho)$ . Лемма доказана.

**ТЕОРЕМА 1** (инвариантность относительно пространственной симметрии). *Для двумерного течения Колмогорова, описывающегося уравнением НС (1) (с четным числом  $n_K$ ) с периодическим граничным условием (2) и гладким начальным условием, которое обладает пространственной вращательной симметрией (3) или трансляционной симметрией (4), если для его решения  $\psi(x, y, t)$  ряд Тейлора имеет ненулевой радиус сходимости  $\rho$  при всех  $t \geq 0$ , то это решение сохраняет ту же пространственную симметрию, что и начальное условие, при всех  $t \geq 0$ .*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Поскольку в начальный момент времени справедливо равенство  $\psi(x, y, 0) = \psi'(x', y', 0)$ , в соответствии с леммой 3 (при  $t_0 = 0$ ) мы имеем пространственную симметрию

$$\psi(x, y, t) = \psi'(x', y', t), \quad t \in [0, \delta_0],$$

где  $\delta_0 < \rho_0$  и  $\rho_0$  – радиус сходимости ряда Тейлора в точке  $t = 0$ . Тогда, положив  $t_0 = \delta_0$ , в соответствии с леммой 3 мы имеем пространственную симметрию

$$\psi(x, y, t) = \psi'(x', y', t), \quad t \in [\delta_0, \delta_1],$$

где  $\delta_1 < \rho_1$  и  $\rho_1$  – радиус сходимости ряда Тейлора в точке  $t = t_0 = \delta_0$ . Далее, положив  $t_0 = \delta_1$ , в соответствии с леммой 3 мы имеем пространственную симметрию

$$\psi(x, y, t) = \psi'(x', y', t), \quad t \in [\delta_1, \delta_2],$$

где  $\delta_2 < \rho_2$  и  $\rho_2$  – радиус сходимости ряда Тейлора в точке  $t = t_0 = \delta_1$ . Заметим, что

$$[0, \delta_0] \cup [\delta_0, \delta_1] \cup [\delta_1, \delta_2] = [0, \delta_2],$$

следовательно, теперь существует пространственная симметрия на большем временном интервале:

$$\psi(x, y, t) = \psi'(x', y', t), \quad t \in [0, \delta_2].$$

Эту процедуру можно продолжить, поскольку ряд Тейлора для  $\psi(x, y, t)$  имеет ненулевой радиус сходимости для всех  $t \geq 0$ . Таким образом, решение всегда обладает пространственной симметрией

$$\psi(x, y, t) = \psi'(x', y', t), \quad t \in [0, +\infty).$$

Теорема доказана. Заметим, что в общем случае легко доказать аналогичную теорему для трехмерных уравнений НС (см. приложение в работе [37]).

### 3. ЗАМЕЧАНИЯ И ЗАКЛЮЧЕНИЕ

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Пусть  $O$  – наблюдатель в системе координат  $xOy$ , а  $O'$  – наблюдатель в системе координат  $x'O'y'$ , где  $(x', y') = (x + \pi, y + \pi)$  или  $(x', y') = (2\pi - x, 2\pi - y)$ . Если для начального условия имеется пространственная симметрия  $\psi'(x', y', 0) = \psi(x, y, 0)$ , то управляющие уравнения и начальное условие являются одинаковыми для наблюдателей  $O$  и  $O'$ . Таким образом, с физической точки зрения два наблюдателя в двух разных системах координат должны видеть один и тот же поток. С точки зрения третьего наблюдателя, одновременно знающего связь между системами координат двух других наблюдателей и их результаты, поток, описываемый уравнениями НС (1), должен сохранять ту же пространственную симметрию, что и его начальное условие. Мы строго математически доказали это физическое наблюдение. Таким образом, теорему об инвариантности относительно пространственной симметрии легко понять с физической точки зрения. Заметим, что в работе [38], основываясь на ковариации уравнений НС, Кида предположил, что турбулентный поток должен сохранять ту же пространственную симметрию, что и начальное условие. Как результат, он использовал пространственную симметрию для уменьшения области моделирования в 64 раза, чтобы достичь более высоких чисел Рейнольдса при ограниченных ресурсах, но при этом рассматривал пространственную симметрию как полезное наблюдение, а не как доказанный закон, хотя на практике DNS нарушает теорему об инвариантности относительно пространственной симметрии.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Численные методы решения двумерного течения Колмогорова, описывающегося уравнением НС (1) (с четным числом  $n_k$ ) с периодическим граничным условием (2) и гладким начальным условием, которое обладает пространственной вращательной симметрией (3) или трансляционной симметрией (4), должны заметно отклоняться от точного решения, если они нарушают теорему об инвариантности относительно пространственной симметрии, доказанную в настоящей работе. Таким образом, эта теорема может быть использована в качестве “абсолютной шкалы” для проверки корректности и точности численных моделей двумерного турбулентного течения Колмогорова.

Например, как было отмечено в работах [31], [32], численное моделирование двумерного турбулентного течения Колмогорова, полученное с помощью CNS (на конечном, но достаточно большом временном интервале), всегда сохраняет ту же пространственную симметрию, что и соответствующее начальное условие, и хорошо согласуется с теоремой об инвариантности относительно пространственной симметрии. Главным образом это связано с тем, что, в отличие от традиционных алгоритмов, численные шумы CNS строго пренебрежимо малы в конечном временном интервале, который, однако, достаточно велик для вычисления статистики. Однако, как упоминалось в работах [31], [32], соответствующие результаты DNS сохраняют пространственную симметрию начального условия лишь в течение короткого начального промежутка времени, но затем быстро теряют ее. Это ясно указывает на то, что результаты DNS заметно отклоняются от точного решения уравнений НС. Другими словами, эти результаты DNS нарушают теорему об инвариантности относительно пространственной симметрии и в самом деле быстро сильно искажаются численными шумами, которые, являясь стохастическими, несомненно не обладают никакой пространственной симметрией. Как было показано в [30], вышеизложенные выводы должны быть общими для турбулентных потоков.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Для двумерного течения Колмогорова, описывающегося уравнением НС (1) (с четным числом  $n_k$ ) с периодическим граничным условием (2) и гладким начальным условием, которое обладает пространственной вращательной симметрией (3) или трансляционной симметрией (4), если начальное условие имеет различные пространственные симметрии, то соответствующие решения должны существенно различаться даже в статистическом смысле.

Например, в работе [32] метод CNS применялся для решения двумерного турбулентного течения Колмогорова (1) в случае  $Re = 2000$  и  $n_k = 16$  при двух различных начальных условиях

$$\psi_1(x, y, 0) = -\frac{1}{2}[\cos(x + y) + \cos(x - y)], \quad (21)$$

$$\psi_2(x, y, 0) = -\frac{1}{2}[\cos(x + y) + \cos(x - y)] + \delta' \sin(x + y), \quad (22)$$

где  $\delta'$  – константа. Заметим, что  $\psi_1(x, y, 0)$  содержит и вращательную, и трансляционную пространственные симметрии, в то время как  $\psi_2(x, y, 0)$  содержит только трансляционную пространственную симметрию для больших  $\delta' \sim O(1)$ . Как отмечалось в работе [32], пространственно-временные траектории, получающиеся методом CNS с использованием начального условия  $\psi_1(x, y, 0)$ , сохраняют те же вращательную и трансляционную пространственные симметрии, что и начальное условие  $\psi_1(x, y, 0)$  при всех  $t \in [0, 300]$ . Это хорошо согласуется с теоремой об инвариантности относительно пространственной симметрии, доказанной в разделе 2.

Если в (22) выбрать  $\delta' = 10^{-20}$ , пространственно-временные траектории, получающиеся методом CNS с использованием начального условия  $\psi_2(x, y, 0)$ , сначала сохраняют те же вращательную и трансляционную пространственные симметрии, что и начальное условие  $\psi_1(x, y, 0)$ . Это происходит потому, что возмущение  $10^{-20} \sin(x + y)$  в  $\psi_2(x, y, 0)$  слишком мало по сравнению с  $\psi_1(x, y, 0)$  до тех пор, пока не достигнет макроуровня из-за так называемого эффекта бабочки для хаотических характеристик турбулентности [11]–[15]. Такое явление наблюдается примерно при  $t \approx 35$ , когда в решении окончательно разрушается исходная пространственная симметрия начального условия  $\psi_1(x, y, 0)$ .

Таким образом, для больших  $\delta' \sim O(1)$  результат метода CNS сохраняет ту же пространственную трансляционную симметрию начального условия  $\psi_2(x, y, 0)$  [32]. Это также хорошо согласуется с теоремой об инвариантности относительно пространственной симметрии. Безусловно, два результата, полученных методом CNS, должны иметь разную статистику, поскольку они обладают разной пространственной симметрией. Таким образом, теорема об инвариантности относительно пространственной симметрии также подтверждает вывод о том, что турбулентность представляет собой своего рода ультрахаос [29], [39], т. е. небольшое возмущение может привести к существенным различиям не только в пространственно-временной траектории, но и в статистике турбулентности.

Следует еще раз подчеркнуть, что соответствующие результаты, полученные методом CNS для одних и тех же турбулентных потоков Колмогорова, быстро теряют свою пространственную симметрию, поскольку стохастические численные шумы без пространственной симметрии быстро разрастаются до макроуровня. Следовательно, теорема об инвариантности относительно пространственной симметрии строго

подтверждает, что результаты метода DNS для двумерного турбулентного потока Колмогорова действительно быстро сильно загрязняются численными шумами, как было показано в [31]. По этой же причине так называемый “каскад увеличения шума” (noise-expansion cascade), выявленный в [32] с помощью CNS, не может быть обнаружен с помощью DNS. Это хороший пример, иллюстрирующий, что CNS действительно может раскрыть истину и реальность турбулентности НС.

Для достаточно большого числа Рейнольдса, скажем, для  $Re = 2000$ , рассмотренного в [32], двумерное течение Колмогорова (1) является турбулентным. В гидродинамических исследованиях принято считать, что турбулентность имеет хаотический характер [11]–[15], следовательно, из-за эффекта бабочки малое возмущение  $\delta' \sin(x + y)$  начального условия  $\psi_2(x, y, t)$  в (22) должно быстро увеличиваться до того же порядка величины, что и начальное условие (21). Однако  $\psi_1(x, y, t)$  имеет при  $\delta' \sim O(1)$  иную пространственную симметрию по сравнению с  $\psi_2(x, y, t)$ , поэтому согласно теореме об инвариантности относительно пространственной симметрии турбулентный поток Колмогорова  $\psi_1(x, y, t)$  имеет иную пространственную симметрию даже для произвольно малых  $\delta'$ , скажем, для  $\delta' \rightarrow 0$ . Таким образом, теорема об инвариантности относительно пространственной симметрии плюс эффект бабочки для хаоса подтверждают следующую гипотезу.

**ГИПОТЕЗА 1.** Двумерное течение Колмогорова, задающееся уравнением НС (1) (с четным числом  $n_k$ ) с периодическим граничным условием (2) и гладким начальным условием с пространственной вращательной симметрией (3) или трансляционной симметрией (4), имеет различные гладкие глобальные решения для всех значений  $t \geq 0$  при почти одинаковых начальных условиях  $\psi_1(x, y, 0)$  и  $\psi_2(x, y, 0)$ , где  $|\psi_1(x, y, 0) - \psi_2(x, y, 0)| \leq \delta$  для сколь угодно малого  $\delta$  (или при  $\delta \rightarrow 0$ ).

Как было показано в работе [33], результаты метода CNS для трехмерного потока Колмогорова также сохраняют пространственную симметрию начального условия на протяжении всего временного интервала моделирования (для  $t \in [0, 500]$ ). Это убедительно свидетельствует о том, что гипотеза 1 должна быть справедлива в общем случае и подтверждает следующую гипотезу, упомянутую в статье [40].

**ГИПОТЕЗА 2.** Турбулентность НС допускает различные гладкие глобальные решения  $\mathbf{u}_1(\mathbf{r}, t)$  и  $\mathbf{u}_2(\mathbf{r}, t)$  для всех  $t > 0$  при практически одинаковых начальных условиях  $\mathbf{u}_1(\mathbf{r}, 0)$  и  $\mathbf{u}_2(\mathbf{r}, 0)$ , где  $|\mathbf{u}_1(\mathbf{r}, 0) - \mathbf{u}_2(\mathbf{r}, 0)| \leq \delta$  для сколь угодно малых  $\delta$  (или при  $\delta \rightarrow 0$ ).

Очевидно, что если поток ламинарный, то все малые возмущения в начальном условии не должны увеличиваться до макроуровня, т. е. должны оставаться малыми навсегда. Таким образом, две упомянутые выше гипотезы верны только для турбулентных потоков. Наконец, следует подчеркнуть, что эти две гипотезы могут быть тесно связаны с проблемой неединственности решений уравнений НС, которая входит в список семи Проблем тысячелетия Института математики Клэя (см. <https://www.claymath.org/millennium-problems/>).

Что происходит, когда начальное условие не обладает пространственной симметрией? В работе [30] мы применили оба метода DNS и CNS для решения уравнения двумерного турбулентного потока Рэлея–Бенара, выбрав в качестве начального условия тепловые флуктуации, которые, будучи случайными, не обладают пространственной симметрией. Было обнаружено, что поток, полученный методом

CNS, имеет вихревой тип при всех  $t \in [0, 500]$ , тогда как поток, полученный методом DNS, сначала является потоком вихревого типа вплоть до момента времени  $t \approx 188$ , после чего превращается в своего рода зонное течение при  $t \in [188, 500]$ . В настоящее время установлено [41], что конечный тип потока (полученный методом DNS) в такой задаче очень чувствителен к шагу по времени для некоторых чисел Рейнольдса: два типа потока часто чередуются при уменьшении шага по времени до очень малого значения. Тем самым следует предположить, что шаг по времени, соответствующий каждому типу турбулентного потока, должен выбираться из плотного множества. Все эти примеры ясно показывают, что численные шумы действительно должны оказывать огромное влияние на глобальные характеристики турбулентности, хотя бы иногда. Остается открытым вопрос: нужно ли использовать стохастические начальные условия для турбулентности Навье–Стокса?

Следует отметить, что, в отличие от точного решения, упомянутого в теореме из раздела 2, численные результаты, полученные методом CNS, надежны только на конечном, но достаточно большом интервале времени, при  $t \in [0, T_c]$ , где  $T_c$  называется критическим предсказуемым временем. Как мы указали в книге [22], для хаотической и турбулентной системы  $T_c \sim -\kappa \ln \mathcal{E}_0$ , где  $\mathcal{E}_0 > 0$  – уровень фонового численного шума, а  $\kappa > 0$  – показатель Ляпунова хаотической системы. Очевидно, чем меньше  $\mathcal{E}_0$ , тем больше  $T_c$ . Поскольку уровень  $\mathcal{E}_0$  в CNS значительно меньше, чем в DNS, CNS может давать надежные результаты моделирования хаотических систем и турбулентных потоков в гораздо большем временном интервале  $[0, T_c]$ .

С этой точки зрения DNS можно рассматривать как частный случай CNS, поскольку DNS часто использует одинарную или двойную точность с методом Рунге–Кутты 4-го порядка по времени, что соответствует довольно малому критическому предсказуемому времени  $T_c$ , слишком короткому для статистических вычислений. К сожалению, в DNS отсутствует понятие критического предсказуемого времени, поскольку ошибочно предполагается, что численные шумы турбулентности НС не должны возрастать до макроуровня.

Следует подчеркнуть, что, хотя результаты CNS являются численными, они могут дать представление о некоторых математических фактах и реалиях турбулентности НС, таких как каскад увеличения шума [32], ультрахаотическое свойство [39], теорема об инвариантности относительно пространственной симметрии, доказанная в разделе 2, и гипотезы, упомянутые выше и в [40]. Мы надеемся, что метод CNS [21]–[33], [37], [39], [40] можно использовать в качестве мощного инструмента для изучения турбулентности, хотя необходимы дальнейшие его исследования.

Заметим, что уравнения НС являются детерминированными, поскольку всеми стохастическими малыми возмущениями пренебрегают. Однако это лишь предположение, поэтому остается открытым вопрос [41], является ли такое предположение физически обоснованным или нет.

Почему многие результаты DNS для турбулентности НС хорошо согласуются с экспериментальными данными, даже если они сильно искажены шумами численных расчетов? Это связано с тем, что существуют два типа турбулентных потоков – нормальный хаос и ультрахаос. Статистика ультрахаоса очень чувствительна к возмущениям, а статистика нормального хаоса – нет. Например, хаотическое решение уравнения Лоренца – это нормальный хаос: хотя его траектории, полученные традиционными алгоритмами, сильно искажены численными шумами и значительно отличаются от его точного решения, статистика стабильна и хорошо согласуется

с результатом CNS [23]. Таким образом, если турбулентный поток является нормальным хаосом, его статистика должна быть стабильной и, следовательно, может хорошо согласовываться с экспериментальными данными, даже если пространственно-временные траектории сильно искажены шумами численных расчетов. К сожалению, турбулентность НС по своей сути является ультрахаотической [39]. Следует подчеркнуть, что точное решение турбулентности НС – это одна задача, а численное моделирование турбулентности НС – другая. И то, и другое – объект математических исследований, поэтому они существенно отличаются от практической турбулентности в физике (см. обсуждение в работах [39]).

**Конфликт интересов.** Автор заявляет, что у него нет конфликта интересов.

### Список литературы

- [1] E. N. Lorenz, “Deterministic non-periodic flow”, *J. Atmos. Sci.*, **20**:2 (1963), 130–141.
- [2] S. Smale, “Differentiable dynamical systems”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **73**:6 (1967), 747–817.
- [3] T.-Y. Li, J. A. Yorke, “Period three implies chaos”, *Amer. Math. Monthly*, **82**:10 (1975), 985–992.
- [4] R. M. May, “Simple mathematical models with very complicated dynamics”, *Nature*, **261**:5560 (1976), 459–467.
- [5] M. J. Feigenbaum, “Quantitative universality for a class of nonlinear transformations”, *J. Stat. Phys.*, **19**:1 (1978), 25–52; “The universal metric properties of nonlinear transformations”, **21**:6 (1979), 669–706.
- [6] E. N. Lorenz, “Computational periodicity as observed in a simple system”, *Tellus A*, **58**:5 (2006), 549–557.
- [7] C. L. M. H. Navier, “Mémoire sur le lois du mouvement des fluides”, *Mém. Acad. Roy. Sci. Paris*, **6** (1823), 389–416.
- [8] G. G. Stokes, “On the theories of internal friction of fluids in motion, and of the equilibrium and motion of elastic solids”, *Trans. Cambridge Philos. Soc.*, **8** (1845), 287–305.
- [9] O. Reynolds, “On the dynamical theory of turbulent incompressible viscous fluids and the determination of the criterion”, *Phil. Trans. R. Soc. London Ser. A*, **186** (1895), 123–164.
- [10] G. I. Taylor, “Statistical theory of turbulence”, *Proc. R. Soc. London Ser. A*, **151**:873 (1935), 421–444.
- [11] R. G. Deissler, “Is Navier–Stokes turbulence chaotic?”, *Phys. Fluids*, **29**:5 (1986), 1453–1457.
- [12] J. Ge, J. Rolland, J. C. Vassilicos, “The production of uncertainty in three-dimensional Navier–Stokes turbulence”, *J. Fluid Mech.*, **977** (2023), A17, 33 pp.
- [13] G. Boffetta, S. Musacchio, “Predictability of the inverse energy cascade in 2D turbulence”, *Phys. Fluids*, **13**:4 (2001), 1060–1062.
- [14] G. Boffetta, S. Musacchio, “Chaos and predictability of homogeneous-isotropic turbulence”, *Phys. Rev. Lett.*, **119**:5 (2017), 054102, 5 pp.
- [15] A. Berera, R. D. J. G. Ho, “Chaotic properties of a turbulent isotropic fluid”, *Phys. Rev. Lett.*, **120**:2 (2018), 024101, 5 pp.
- [16] S. A. Orszag, “Analytical theories of turbulence”, *J. Fluid Mech.*, **41**:2 (1970), 363–386.
- [17] Z.-S. She, E. Jackson, S. A. Orszag, “Structure and dynamics of homogeneous turbulence: models and simulations”, *Proc. R. Soc. London Ser. A*, **434**:1890 (1991), 101–124.
- [18] K. Moin, K. Mahesh, “Direct numerical simulation: A tool in turbulence research”, *Annu. Rev. Fluid Mech.*, **30**:1 (1998), 539–578.
- [19] R. Scardovelli, S. Zaleski, “Direct numerical simulation of free-surface and interfacial flow”, *Annu. Rev. Fluid Mech.*, **31**:1 (1999), 567–603.

- [20] G. N. Coleman, R. D. Sandberg, *A primer on direct numerical simulation of turbulence – methods, procedures and guidelines*, Tech. Rep. AFM-09/01a, Aerodynamics & Flight Mechanics Research Group, University of Southampton, UK, 2010.
- [21] S. Liao, “On the reliability of computed chaotic solutions of non-linear differential equations”, *Tellus A*, **61**:4 (2009), 550–564.
- [22] S. Liao, *Clean Numerical Simulation*, Advances in Applied Mathematics, Chapman and Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2023.
- [23] S. Liao, P. Wang, “On the mathematically reliable long-term simulation of chaotic solutions of Lorenz equation in the interval  $[0, 10000]$ ”, *Sci. China Phys. Mech. Astron.*, **57**:2 (2014), 330–335.
- [24] X. Li, S. Liao, “More than six hundred new families of Newtonian periodic planar collisionless three-body orbits”, *Sci. China Phys. Mech. Astron.*, **60**:12 (2017), 129511, 7 pp.
- [25] X. Li, Y. Jing, S. Liao, “Over a thousand new periodic orbits of a planar three-body system with unequal masses”, *Publ. Astron. Soc. Japan*, **70**:4 (2018), 64, 7 pp.
- [26] S. Liao, X. Li, Y. Yang, “Three-body problem – from Newton to supercomputer plus machine learning”, *New Astron.*, **96** (2022), 101850, 11 pp.
- [27] T. Hu, S. Liao, “On the risks of using double precision in numerical simulations of spatio-temporal chaos”, *J. Comput. Phys.*, **418** (2020), 109629, 25 pp.
- [28] S. Qin, S. Liao, “Influence of numerical noises on computer-generated simulation of spatio-temporal chaos”, *Chaos Solitons Fractals*, **136** (2020), 109790, 13 pp.
- [29] S. Liao, S. Qin, “Ultra-chaos: An insurmountable objective obstacle of reproducibility and replication”, *Adv. Appl. Math. Mech.*, **14**:4 (2022), 799–815.
- [30] S. Qin, S. Liao, “Large-scale influence of numerical noises as artificial stochastic disturbances on a sustained turbulence”, *J. Fluid Mech.*, **948** (2022), A7, 25 pp.
- [31] S. Qin, Y. Yang, Y. Huang, X. Mei, L. Wang, S. Liao, “Is a direct numerical simulation (DNS) of Navier–Stokes equations with small enough grid spacing and time-step definitely reliable/correct?”, *J. Ocean Eng. Sci.*, **9**:3 (2024), 293–310.
- [32] S. Liao, S. Qin, “Noise-expansion cascade: an origin of randomness of turbulence”, *J. Fluid Mech.*, **1009** (2025), A2, 22 pp.
- [33] S. Qin, S. Liao, “Clean numerical simulation of three-dimensional turbulent Kolmogorov flow”, *Phys. Fluids*, **37**:10 (2025), 105160, 15 pp.
- [34] А. М. Обухов, “Течение Колмогорова и его лабораторное моделирование”, *УМН*, **38**:4(232) (1983), 101–111.
- [35] G. J. Chandler, R. R. Kerswell, “Invariant recurrent solutions embedded in a turbulent two-dimensional Kolmogorov flow”, *J. Fluid Mech.*, **722** (2013), 554–595.
- [36] W. Wu, F. G. Schmitt, E. Calzavarini, L. Wang, “A quadratic Reynolds stress development for the turbulent Kolmogorov flow”, *Phys. Fluids*, **33**:12 (2021), 125–129.
- [37] S. Liao, *Spatial symmetry invariance of solution of Kolmogorov flow*, arXiv: 2603.04447.
- [38] S. Kida, “Numerical simulation of two-dimensional turbulence with high-symmetry”, *J. Phys. Soc. Japan*, **54**:8 (1985), 2840–2854.
- [39] S. Qin, K. Xu, S. Liao, “Ultra-chaotic property of Navier–Stokes turbulence”, *Eur. J. Mech. – B/Fluids*, **119** (2026), 204540, 7 pp., arXiv: 2510.06620.
- [40] S. Liao, S. Qin, *Non-uniqueness of smooth solutions of the Navier–Stokes equations from almost the same initial conditions*, arXiv: 2602.12666.
- [41] S. Qin, K. Xu, S. Liao, *A paradox of the Navier–Stokes turbulence*, arXiv: 2510.11220.

Поступила в редакцию 28.02.2026,  
 после доработки 28.02.2026,  
 принята к публикации 13.05.2026