申请上海交通大学硕士学位论文

求解非线性边值问题的小波同伦分析方法及其应用

论文作者 杨兆臣

学　　号 1140109211

指导教师 廖世俊 教授

专　　业 船舶与海洋工程

答辩日期 2017 年 1 月 13 日

Submitted in total fulfilment of the requirements for the degree of Master in Naval Architecture and Ocean Engineering

THE WAVELET HOMOTOPY ANALYSIS METHOD FOR NONLINEAR BOUNDARY VALUE PROBLEMS AND ITS APPLICATIONS

Yang Zhao-Chen

Supervisor

Prof. Liao Shi-Jun

School of Naval Architecture, Ocean and Civil Engineering

Shanghai Jiao Tong University

Shanghai, P.R.China

January 13th, 2017

上海交通大学
学位论文原创性声明

本人郑重声明：所呈交的学位论文，是本人在导师的指导下，独立进行研究工作所取得的成果。除文中已经注明引用的内容外，本论文不包含任何其他个人或集体已经发表或撰写过的作品成果。对本文的研究做出重要贡献的个人和集体，均已在文中以明确方式标明。本人完全意识到本声明的法律结果由本人承担。

学位论文作者签名：

日　期：2017 年 1 月 14 日

上海交通大学
学位论文版权使用授权书

本学位论文作者完全了解学校有关保留、使用学位论文的规定，同意学校保留并向国家有关部门或机构送交论文的复印件和电子版，允许论文被查阅和借阅。本人授权上海交通大学可以将本学位论文的全部或部分内容编入有关数据库进行检索，可以采用影印、缩印或扫描等复制手段保存和汇编本学位论文。

保　密 □，在 _____ 年解密后适用本授权书。

本学位论文属于

不保密 ☑。

（请在以上方框内打“✓”）

学位论文作者签名：　　指导教师签名：

日　期：2017 年 1 月 14 日　　日　期：2017 年 1 月 14 日

上海交通大学硕士学位论文答辩决议书

1140109211

姓　名	杨兆臣	学号	1140109211	所在学科	船舶与海洋工程
指导教师	廖世俊	答辩日期	2017-01-13	答辩地点	木兰楼B808
论文题目	求解非线性边值问题的小波同伦分析方法及其应用				

投票表决结果：3/3/3（同意票数/实到委员数/应到委员数）　答辩结论：☑通过　☐未通过

评语和决议：

非线性问题普遍存在于科学、工程和社会生活中，非线性问题的求解是数学物理领域的重要课题。该硕士学位论文基于同伦分析方法和小波方法发展求解非线性边值问题的新算法，选题具有重要的理论意义和应用价值。

论文的主要工作和创新点如下：

1. 首次将同伦分析方法与小波分析技术相结合，提出了一种求解非线性边值问题的新算法；并通过在边值条件中引入辅助参数，成功地求解了多解问题；
2. 针对偏微分方程边值问题中偏导数的计算问题，提出了一种基于截面曲线的快速小波算法；
3. 针对常见的三大类非齐次边界条件及其混合边界条件，给出了统一的小波处理方法；
4. 提出了一种求解变系数微分方程的广义小波伽辽金方法。

论文结构合理，层次分明，重点突出，图表、参考文献规范，论文工作反映了作者已掌握了扎实的基础理论和专业知识，具有很强的科研能力。论文已达到硕士学位论文要求，是一篇优秀的硕士学位论文。

论文作者在答辩时思路清晰，回答问题正确。经答辩委员会表决，全票（3票）通过论文答辩，并建议授予工学硕士学位。

2017 年 1 月 13 日

答辩委员会成员签名	职务	姓名	职称	单位	签名
	主席	邹早建	教授	上海交通大学	
	委员	柳银萍	教授	华东师范大学	
	委员	汪淳	副教授	上海交通大学	
	秘书	林志良 (60649)	副教授	上海交通大学	

求解非线性边值问题的小波同伦分析方法及其应用

摘　　要

科学、工程乃至社会生活中均广泛存在非线性现象，而其中很多问题都可以用非线性微分方程来描述. 众所周知，非线性微分方程的求解要远比线性问题要困难. 自 1992 年廖世俊提出同伦分析方法以来，这个强大而便捷的解析工具在诸多领域的非线性问题求解中得到了广泛的应用. 本论文基于同伦分析方法和现代小波理论，提出了一种求解非线性边值问题的新方法，即小波同伦分析方法. 论文的主要贡献如下:

(1) 将同伦分析方法和广义 Coiflet 小波理论成功地结合在一起，提出了小波同伦分析方法，并分别以一维和二维 Bratu 方程为范例，介绍了求解常、偏微分方程边值问题的小波同伦分析方法的基本思想和主要算法步骤.

(2) 介绍了一种利用小波同伦分析方法寻找多解的策略. 其主要思想是通过引入参数的方式将原非线性边值问题转化成含待定参数的边值问题. 为了求解含待定参数的非线性边值问题，分别对控制方程和边界条件构造零阶形变方程. 通过计算结果的分析与对比，验证了该策略的有效性.

(3) 在小波同伦分析方法的框架内，给出了非齐次边界条件的小波处理方法. 该方法普遍适用于处理各种简单边界条件及混合边界条件，并具有较高的计算效率. 另外，该方法算法步骤简单规范，故比较容易进行实际应用.

(4) 为了求解各种类型的变系数微分方程，发展出一种通用的方法，即广义小波伽辽金方法. 与传统的小波伽辽金方法相比，广义小波伽辽金方法完全避免了复杂连接系数的计算，对各种类型的微分方程具有更加广泛的适用性和更高的求解效率.

总的来说，本论文中提出的小波同伦分析方法具有以下优势:

a) 同传统同伦分析方法一样，小波同伦分析方法提供了一种保证收敛的方法，即：通过调节控制收敛参数的大小，可方便控制解的收敛性；

b) 可以通过调节分辨率水平来平衡计算效率与解的精度之间的关系；

c) 与传统的同伦分析方法相比，由于解表达与计算效率对辅助线性算子的选择不敏感，故小波同伦分析方法在辅助线性算子的选择上更加自由，同时也更加容易；

d) 小波同伦分析方法具有较高的求解效率，特别是在求解过程中随着逼近阶数的增加，CPU 耗时仅线性增长；

e) 小波同伦迭代技术可以显著加速收敛.

总而言之，小波同伦分析方法为求解非线性边值问题提供了一种便捷而高效的方法.

关键词： 非线性边值问题，广义 Coiflet 小波，同伦分析方法 (HAM)，多解问题，非齐次边界条件，连接系数，广义小波伽辽金方法

THE WAVELET HOMOTOPY ANALYSIS METHOD FOR NONLINEAR BOUNDARY VALUE PROBLEMS AND ITS APPLICATIONS

ABSTRACT

Nonlinear phenomenons widely arise in science, engineering and even social life, and lots of them are described by nonlinear differential equations. It is well-known that nonlinear problems are much more difficult to solve than linear ones. Since the homotopy analysis method (HAM) was proposed by Liao in 1992, this powerful and easy-to-use analytical tool has been widely applied to solve many highly nonlinear problems in different fields. Based on the homotopy analysis method and modern wavelet theories, a new method for nonlinear boundary value problems, namely, the wavelet homotopy analysis method (wHAM) is proposed in this thesis. The main contributions of this thesis are as follows:

(1) The homotopy analysis method and the generalized Coiflet wavelet are successfully combined, and the wavelet homotopy analysis method is proposed. The basic ideas and main algorithms for nonlinear ordinary and partial differential equations are described by one-dimensional and two-dimensional Bratu equations, respectively.

(2) An approach to solve multi-solution problems by the wavelet homotopy analysis method is introduced. The main idea of this approach is to transform the original nonlinear problem into a new one depending on parameters. To solve the problem depending on parameters, zeroth-order deformation equations for the governing equation as well as the boundary conditions are constructed, respectively. The validity of this approach is verified by numerical results.

(3) In the frame of the wavelet homotopy analysis method, a generalized wavelet approach is developed to deal with different kinds of non-homogeneous boundary conditions. This approach is widely adaptive and highly efficient for various kinds of boundary conditions varying from simple boundary conditions to complicated mixed ones. Besides, due to the simple and standardized procedure, this approach is very easy to use.

(4) The generalized wavelet-Galerkin method is proposed to solve differential equations with non-constant coefficients. Compared with the traditional wavelet-Galerkin method, the generalized wavelet-Galerkin method avoids computing the complicated connection coefficients and is computationally very efficient to solve various types of differential equations with non-constant coefficients.

In general, the wavelet homotopy analysis method possesses the following advantages:

a) Based on the homotopy analysis method, the convergence-control parameter provides us a convenient way to control the convergence of the solution;

b) The accuracy and the efficiency can be conveniently balanced by adjusting the resolution level;

c) Compared with the traditional homotopy analysis method, the wavelet homotopy analysis method possesses larger freedom to choose the auxiliary linear operators, because the solution expression and the computational efficiency are not sensitive to the choice of the auxiliary linear operators;

d) The wavelet homotopy analysis method possesses very high computational efficiency, especially, the CPU time just increases linearly with respect to the approximation order;

e) The iterative wavelet homototy analysis method can significantly accelerate the convergence of the solution.

In summary, the wavelet homotopy analysis method provides us a convenient and efficient way to solve nonlinear boundary value problems.

KEY WORDS: Nonlinear boundary value problem, Generalized Coiflet-type wavelet, Homotopy analysis method (HAM), Multi-solution problem, Nonhomogeneous boundary condition, Connection coefficient, Generalized wavelet-Galerkin method

目　　录

摘要 i

ABSTRACT iii

目录 vii

插图索引 xiii

表格索引 xvi

主要符号对照表 xvii

第一章 绪论 1

1.1 引言 1

1.2 同伦分析方法的发展概述 3

1.2.1 同伦分析方法理论的发展 3

1.2.2 同伦分析方法的应用 6

1.3 小波理论的发展及其在微分方程中的应用 7

1.3.1 小波理论的发展 7

1.3.2 微分方程的小波解法 8

1.4 发展新方法的动机 9

1.5 本论文的主要工作 11

1.6 主要创新点 13

第二章 基本小波理论与重要数学定义 15

2.1 多分辨分析 15

2.2 广义 Coiflet 小波的基本性质 16

2.3 L^2 函数的广义 Coiflet 小波逼近 17
2.3.1 $L^2(\mathbb{R})$ 上的小波逼近 17
2.3.2 $L^2[0,1]$ 上的小波逼近 19
2.3.3 $L^2[0,1]^2$ 上的小波逼近 21
2.4 连接系数的计算方法 22
2.5 几个重要的数学定义 23
2.6 本章小结 24

第三章 解非线性常微分方程的小波同伦分析方法 25
3.1 小波同伦分析方法的基本思想 25
3.1.1 问题描述 25
3.1.2 基本同伦的构造 26
3.1.3 小波同伦基本方程 29
3.2 结果分析 31
3.2.1 收敛性分析 31
3.2.2 精度与效率的平衡 32
3.2.3 对辅助线性算子的适应性分析 36
3.2.4 小波同伦迭代技术 41
3.3 本章小结 41

第四章 利用小波同伦分析方法寻找多解 45
4.1 基本思想 45
4.1.1 基本变换 45
4.1.2 基本同伦的构造 46
4.1.3 小波同伦基本方程 48
4.2 结果分析 50
4.3 本章小结 54

第五章 解非线性偏微分方程的小波同伦分析方法 55
5.1 小波同伦分析方法的基本思想 55
5.1.1 问题描述 55
5.1.2 基本同伦的构造 56
5.1.3 小波同伦基本方程 59
5.1.4 偏导数的快速算法 60
5.2 结果分析 62
5.2.1 收敛性分析 62
5.2.2 计算效率分析 65
5.2.3 辅助线性算子的影响分析 65
5.2.4 控制收敛参数影响分析 68
5.3 本章小结 68

第六章 非齐次边界条件的小波处理方法 71
6.1 三类常见的边界条件 71
6.2 非齐次边界条件的小波处理方法 72
6.2.1 Dirichlet 边界条件 74
6.2.2 Neumann 边界条件 74
6.2.3 Robin 边界条件 76
6.2.4 混合边界条件 77
6.3 计算实例 78
6.3.1 Dirichlet–Neumann 混合边界条件实例 78
6.3.2 Robin 边界条件实例 81
6.3.3 全混合边界条件实例 82
6.4 本章小结 86

第七章 广义小波伽辽金方法 89
7.1 问题的进一步阐述 90
7.2 基本定理 92

7.3 广义小波伽辽金方法 97
7.3.1 变系数线性常微分方程边值问题的统一解法 97
7.3.2 变系数线性偏微分方程边值问题的统一解法 99
7.4 计算实例 100
7.4.1 多项式系数常微分方程实例 101
7.4.2 混合系数常微分方程实例 103
7.4.3 特殊函数系数常微分方程实例 105
7.4.4 变系数偏微分方程实例 109
7.5 本章小结 111

第八章 结论与展望 **113**
8.1 工作总结 113
8.2 主要创新点 115
8.3 研究展望 115

参考文献 **117**

致谢 **131**

攻读学位期间撰写的学术论文目录 **133**

插图索引

2–1 消失矩数为 $N = 6$，尺度函数的一阶矩为 $M_1 = 7$ 时广义正交 Coiflet 小波的尺度函数. 18

3–1 Frank-Kamenetskii 参数 $\lambda = 1$，控制收敛参数 $c_0 = -1/2$，辅助线性算子 $\mathscr{L}[\phi(x;q)] = \frac{\partial^2\phi(x;q)}{\partial x^2}$ 时，不同分辨率水平下小波同伦逼近的均方误差随阶数 m 的变化. 32

3–2 分辨率水平 $j = 4$，控制收敛参数 $c_0 = -1/2$，辅助线性算子 $\mathscr{L}[\phi(x;q)] = \frac{\partial^2\phi(x;q)}{\partial x^2}$ 时，不同 λ 下 40 阶小波同伦解与精确解的对比. 33

3–3 Frank-Kamenetskii 参数 $\lambda = 1$，控制收敛参数 $c_0 = -1/2$，辅助线性算子 $\mathscr{L}[\phi(x;q)] = \frac{\partial^2\phi(x;q)}{\partial x^2}$ 时，不同分辨率水平下小波同伦解的误差分布. 36

3–4 Frank-Kamenetskii 参数 $\lambda = 1$，分辨率水平 $j = 6$，对于不同的辅助线性算子，采用小波同伦分析方法求解的 CPU 耗时 (不包含预处理) 随着阶数 m 的变化. 37

3–5 Frank-Kamenetskii 参数 $\lambda = 1$，辅助线性算子参数 $\kappa_0 = 0, \kappa_1 = 0$ 时，采用传统同伦分析方法求解的 CPU 耗时随着阶数 m 的变化. 38

3–6 Frank-Kamenetskii 参数 $\lambda = 1$，分辨率水平 $j = 6$，控制收敛参数 $c_0 = -0.4$ 时，不同辅助线性算子 ($\kappa_1 = 0$ 且 κ_0 从 -5 到 5) 对应的均方误差随着阶数的变化. 39

3–7 Frank-Kamenetskii 参数 $\lambda = 1$，分辨率水平 $j = 6$，控制收敛参数 $c_0 = -0.4$ 时，不同辅助线性算子 ($\kappa_0 = 5$ 且 κ_1 从 0 到 5) 对应的均方误差随着阶数的变化. 40

3–8 Frank-Kamenetskii 参数 $\lambda = 1$，分辨率水平 $j = 6$，辅助线性算子为 $\mathscr{L}[\phi(x;q)] = \frac{\partial^2\phi(x;q)}{\partial x^2}$ 时，迭代与非迭代小波同伦解的均方误差随 CPU 耗时的变化. 42

4–1 Frank-Kamenetskii 参数 $\lambda = 2$，分辨率水平 $j = 4$，辅助线性算子 $\mathscr{L}[\phi(x;q)] = \frac{\partial^2 \phi(x;q)}{\partial x^2}$ 时，上下两支小波同伦解与精确解的对比. 50

4–2 Frank-Kamenetskii 参数 $\lambda = 2$，分辨率水平 $j = 4$，辅助线性算子 $\mathscr{L}[\phi(x;q)] = \frac{\partial^2 \phi(x;q)}{\partial x^2}$ 时，下支解参数 Δ_n 随迭代次数 n 的变化. 51

4–3 Frank-Kamenetskii 参数 $\lambda = 2$，分辨率水平 $j = 4$，辅助线性算子 $\mathscr{L}[\phi(x;q)] = \frac{\partial^2 \phi(x;q)}{\partial x^2}$ 时，上支解参数 Δ_n 随迭代次数 n 的变化. 52

4–4 分辨率水平 $j = 4$，辅助线性算子 $\mathscr{L}[\phi(x;q)] = \frac{\partial^2 \phi(x;q)}{\partial x^2}$ 时，不同 λ 下小波同伦解与精确解的对比. 53

5–1 Frank-Kamenetskii 参数 $\lambda = 1$，分辨率水平 $j = 5$，控制收敛参数 $c_0 = -0.4$ 时，不同阶数小波同伦解对应的截面曲线. 63

5–2 Frank-Kamenetskii 参数 $\lambda = 1$，分辨率水平 $j = 5$，控制收敛参数 $c_0 = -0.4$ 时，残差随阶数 m 的变化. 64

5–3 Frank-Kamenetskii 参数 $\lambda = 1$ 时，由传统同伦分析方法 (HAM) ($c_0 = -1, c_1 = 0, c_2 = -1/2$)、小波同伦分析方法 (wHAM) ($c_0 = -0.4$) 和小波同伦迭代技术 (i.wHAM) ($c_0 = -0.4$) 得到的解的均方误差随阶数或迭代次数的变化. 67

6–1 分辨率水平 $j = 4$ 时，Dirichlet–Neumann 混合边值问题 (6–28) 和 (6–29) 的小波解与精确解之对比. 79

6–2 分辨率水平 $j = 4$ 时，Robin 边值问题 (6–39) 和 (6–40) 的小波解与精确解之对比. 83

6–3 分辨率水平 $j = 4$ 时，全混合边值问题 (6–42) 和 (6–43) 的小波解与精确解的截面曲线之对比. 85

7–1 分辨率水平 $j = 4$ 时，含有多项式系数的边值问题 (7–32) 和 (7–33) 的小波解与精确解之对比. 102

7–2 分辨率水平 $j = 4$ 时，含有混合系数的边值问题 (7–41) 和 (7–42) 的小波解与精确解之对比. 104

7–3 分辨率水平 $j = 4$ 时，以特殊函数为系数的边值问题 (7–46) 和 (7–47) 的小波解与精确解之对比. 107

7–4 分辨率水平 $j = 6$ 时，以特殊函数为系数的边值问题 (7–46) 和 (7–47) 的小波解之误差分布. 108
7–5 分辨率水平 $j = 4$ 时，变系数偏微分方程边值问题 (7–54) 和 (7–55) 的小波解与精确解的截面曲线之对比. 110

表格索引

2–1 消失矩数为 $N=6$，尺度函数的一阶矩为 $M_1=7$ 时，广义 Coiflet 正交小波的低通滤波系数 p_k. 17

3–1 Frank-Kamenetskii 参数 $\lambda=1$，控制收敛参数 $c_0=-1/2$，辅助线性算子 $\mathscr{L}[\phi(x;q)]=\frac{\partial^2\phi(x;q)}{\partial x^2}$ 时，不同分辨率水平下 60 阶小波同伦解的均方误差及所对应的 CPU 耗时. 34

3–2 Frank-Kamenetskii 参数 $\lambda=1$，控制收敛参数 $c_0=-1/2$，辅助线性算子 $\mathscr{L}[\phi(x;q)]=\frac{\partial^2\phi(x;q)}{\partial x^2}$ 时，不同阶数小波同伦分析解 (wHAM) 与传统同伦解 (HAM) 的均方误差与 CPU 耗时对比. . . . 35

5–1 求偏导数的常规算法与快速算法在不同分辨率水平下的求和项数对比. 61

5–2 不同 Frank-Kamenetskii 参数 λ 下，由加权残数法 (WRM)、传统同伦分析方法 (HAM) 、小波同伦分析方法 (wHAM) $(j=5,c_0=-0.4)$ 及小波同伦迭代技术 (i.wHAM) $(j=5,c_0=-0.4)$ 得到的解的最大值对比. 62

5–3 Frank-Kamenetskii 参数 $\lambda=1$ 时，由传统同伦分析方法 (HAM) $(c_0=-1,c_1=0,c_2=-1/2)$、小波同伦分析方法 (wHAM) $(c_0=-0.4)$ 和小波同伦迭代技术 (i.wHAM) $(c_0=-0.4)$ 得到的 50 阶逼近对应的函数最大值 u_{max}、均方误差 $ErrSQ_{50}$ 以及 CPU 耗时. 66

5–4 Frank-Kamenetskii 参数 $\lambda=1$，分辨率水平 $j=5$，控制收敛参数 $c_0=-0.4$ 时，采用不同辅助线性算子得到的 50 阶小波同伦解的均方误差及所对应的 CPU 耗时. 66

5–5 Frank-Kamenetskii 参数 $\lambda=1$，分辨率水平 $j=5$，辅助线性算子参数 $\kappa_0=\kappa_1=0$ 时，采用不同控制收敛参数得到的 50 阶小波同伦解的均方误差及所对应的 CPU 耗时. 69

6–1 不同分辨率水平下，Dirichlet–Neumann 混合边值问题 (6–28) 和 (6–29) 的小波解之均方误差 $ErrSQ$ 与 CPU 耗时. 80
6–2 不同分辨率水平下，Robin 边值问题 (6–39) 和 (6–40) 的小波解之均方误差 $ErrSQ$ 与 CPU 耗时. 81
6–3 不同分辨率水平下，全混合边值问题 (6–42) 和 (6–43) 的小波解之均方误差 $ErrSQ$ 与 CPU 耗时. 84

7–1 不同分辨率水平下，以特殊函数为系数的边值问题 (7–46) 和 (7–47) 的小波解之均方误差 $ErrSQ$ 与 CPU 耗时. 106
7–2 不同分辨率水平下，变系数偏微分方程边值问题 (7–54) 和 (7–55) 的小波解之均方误差 $ErrSQ$ 与 CPU 耗时. 111

主要符号对照表

$\mathbf{A} \circ \mathbf{B}$	矩阵 **A** 和 **B** 的 Hadamard / Schur 乘积
$\mathbf{A} \odot \mathbf{v}$	矩阵 **A** 和向量 **v** 的列点乘积
$vec(\mathbf{A})$	矩阵 **A** 的按列拉直
$rvec(\mathbf{A})$	矩阵 **A** 的按行拉直
$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$	矩阵 **A** 和 **B** 的 Kronecker 张量积
$\varphi(x)$	尺度函数
$\psi(x)$	小波函数
$L^2(\Omega)$	区间 (或区域) Ω 上的平方可积函数空间
$\varphi_{j,k}(x)$	多分辨分析上的小波基函数
P^j	多分辨分析上的投影算子
j	分辨率水平
p_k	低通滤波系数
$supp[\varphi(x)]$	函数 $\varphi(x)$ 的紧支集
$\mathbb{V}_j$	分辨率水平 j 对应的函数空间
$\Gamma_{k,l}^{j,n}$	连接系数
c_0	控制收敛参数
$\mathscr{D}_k$	k 阶同伦求导算子
$ErrSQ$	均方误差
∇	多元函数的梯度算子
∇^2	多元函数的 Laplace 算子

第一章 绪论

1.1 引言

自然科学、工程实践以及社会生活的各个领域均普遍存在各种各样的非线性问题，如自然界中涌动的气流、飞溅的水花、漂浮的烟雾、起伏的土地、曲折的海岸，生命科学中胚胎的发育、心脏的搏动、神经的活动、生物种群的变化，工程实践中结构系统的大变形、动力系统中的非线性振动、流体运动中的湍流、非线性波浪、控制系统中的非线性控制，经济社会科学中商品供求的波动、股票价格的涨落等等 [1–7]. 随着科学技术的迅速发展，丰富多彩的非线性现象也逐渐在越来越多的学科和领域中被发现. 近 40 年来，从自然科学、工程技术以及社会科学等领域中，人们对非线性问题开展了广泛深入的研究，并且取得了重大进展. 非线性问题的研究，不仅在力学、物理学、数学、化学、地理学、生物学等领域发挥了越来越重要的作用，而且逐步渗透到社会科学如经济学、人口学、国际关系学等领域. 已经取得的成果显示：非线性研究在深刻地诠释丰富多彩的自然界、复杂多变的周围世界、乃至于哲学与方法论等方面，引起了深刻的变革 [6]. 毫无疑问，在可以预见的未来，非线性问题的探索将在人们深入认识自然界、发展先进的工程技术、解决社会问题等方面扮演越来越重要的角色.

这些丰富多彩的非线性问题，很多都可以归结为非线性微分方程的初、边值问题. 因此，发展非线性微分方程的求解方法，也随之成为一个极其重要的课题. 在过去的几十年中，非线性微分方程求解方法的研究取得了许多重要的发展. 目前，在非线性微分方程精确解和特解的求解方面，针对某些特殊的非线性数学物理方程，已建立和发展了一些方法，如反散射变换方法、双线性和多线性方法、达布变换方法、李群法、CK 直接法、形变映射法、混合指数法、几何方法、Painlevè 截断展开法等等 [8]. 但是，这些方法通常都有特殊的应用背景，只对极少数的特殊问题有效，对于一般性的问题而言并不通用. 由于非线性问题具有特殊的复杂性，只有极少数的问题可以求得精确解析解，其余大部分问题的精确求解是十分困难的. 更进一步来说，对于某个非线性方程，即使知道了它的若干特解，也不能期望将它们叠加在一起来获得方程的一般解，

因为线性方程中最为重要的叠加原理，在非线性方程中已不再成立. 因此可以说，建立一种通用的求解非线性微分方程一般解的方法几乎是不可能的.

在这样的背景下，数值方法与解析近似在非线性问题求解上发挥了越来越重要的作用. 这些形形色色的方法凭借各自的优势，呈现出“八仙过海，各显神通”的局面. 数值方法方面，有限差分法 (finite difference method) [9]、有限元法 (finite element method) [10]、有限体积法 (finite volume method) [11]、边界元法 (boundary element method) [12] 以及谱方法 (spectral method) [13] 等在过去数十年里逐步在非线性问题的求解中得到应用. 解析近似的基本思路是通过级数、逼近等数学工具求解非线性问题的近似解，从而分析、解释和探索非线性现象背后的本质. 在解析近似方法中最为著名的摄动方法 (perturbation techniques) [14, 15]，由于其物理意义明确、易于理解，目前已被成功应用于科学和工程中大量的非线性问题，从深度和广度上都极大地加深了人们对非线性现象及其本质的认识. 当然，任何方法都有其不足和局限性，对于摄动法而言，同样存在很多不足，如过度依赖于物理小参数，缺乏选取基函数的自由以及收敛区域受到较大限制等等. 为了克服摄动法过度依赖于物理小参数的不足，很多非摄动方法也被提了出来，比如 Lyapunov 人工小参数法 (Lyapunov artificial small parameter method) [16]、δ-展开法 (delta expansion method) [17]、Adomain 分解法 (Adomian decomposition method) [18] 等等. 这些方法形式上不需要方程中含有小参数，对摄动理论而言是一个极大的扩展和改进. 但是，这些方法很多时候并不能很好地保证解的收敛性，也不能自由选择基函数，因此本质上还是没能从根本上克服摄动法的缺陷. 1992 年，廖世俊 [19] 在其博士论文中原创性地提出同伦分析方法 (homotopy analysis method, HAM)，成功地克服了上述缺陷. 经过 24 年的发展，同伦分析方法不仅在理论方面取得了大量十分重要的成果，同时在力学、热学、金融和生物等领域的非线性微分方程求解中显示出巨大的威力，因此获得世界各国学者的广泛认可，在各个领域均得到了重要的应用.

与此同时，小波分析作为现代数学的前沿学科，以其强劲的发展势头，在理论上得到系统性发展，在应用上迅速渗透到自然科学、工程技术以及社会科学的各个领域. 从其产生和发展的角度来说，小波分析被数学家和工程师们独立地发现，反映了大科学时代学科之间相互渗透、相互交叉、相互融合的趋势，是纯粹数学、应用数学以及工程技术殊途同归的典范. 事实上，小波分析对当前的理论科学、应用科学均产生了重要影响，对非线性科学、智能计算、网络信息与安全研究有很好的推动作用，被誉为“学科发展的 Windows 平台”

[20]. 近几年来，小波理论也被广泛应用到微分方程的求解上，并发展出三大类方法：小波有限元方法 (wavelet finite difference method) [21–23]、小波配点法 (wavelet collocation method) [24–26] 和小波伽辽金方法 (wavelet-Galerkin method) [27–31]. 小波方法在线性和非线性问题的求解过程中表现出许多优势，目前也正处在蓬勃发展的阶段.

以非线性为基本特征的非线性科学，本质上是一门跨学科的综合性、交叉性学科. 从这个角度来讲，非线性问题的各类求解方法，也势必需要与最前沿的数学理论、数学工具相碰撞、相结合，在继承原方法之优势的同时，以新的数学工具之优势，弥补原方法之不足. 基于这样的思想，笔者考虑将同伦分析方法与小波分析的最新理论相结合，提出一种新的非线性问题求解方法. 那么，同伦分析方法作为一种解析近似方法，与现代小波理论之间，是否能够互相兼容？二者之间，又是否可以互取所长？结合之后的新方法将继承传统同伦分析方法的哪些优势，又具有哪些不足？哪些不足目前能够很好地克服？哪些问题又需要进一步的研究与讨论呢？

本论文中将尽可能对上述问题做一个比较系统的回答，并以通俗易懂的实例为载体，介绍新方法的基本思想、求解非线性边值问题的基本算法与步骤，并与传统的同伦分析方法相对比，分析新方法的优势与潜力. 同时，对新方法框架内的几个重要问题给出一般性的解决方案.

1.2 同伦分析方法的发展概述

1.2.1 同伦分析方法理论的发展

同伦 (homotopy)，是代数拓扑 (algebraic topology) 的一个基本概念，它描述了一个拓扑空间到另一个拓扑空间的连续形变 [32]. 通过对摄动方法 [14, 15] 以及在摄动方法基础上发展起来的 Lyapunov 人工小参数法 [16]、δ-展开法 [17]、Adomain 分解法 [18] 等解析近似方法的优缺点进行深入分析之后，1992 年，廖世俊 [19] 基于“同伦”的基本概念，在其博士论文中原创性地提出同伦分析方法 (homotopy analysis method, HAM)，并对一般形式的非线性微分方程 $\mathcal{N}[u(x)]=0$ 构造了最原始的零阶形变方程 (zeroth-order deformation equation)

$$(1-q)\mathcal{L}[\phi(x;q)]+q\mathcal{N}[\phi(x;q)]=0,\ q\in[0,1], \tag{1–1}$$

其中，$\mathscr{L}$ 为可以自由选择的辅助线性算子 (auxiliary linear operator)，$\mathscr{N}$ 为原方程给定的非线性算子，q 为嵌入变量. 在此基础上，廖世俊推导了该方法的基本框架. 原始的同伦分析方法提供了选取辅助线性算子的自由，打破了传统摄动法强依赖于小（大）物理参数的限制，并由此提供了选取解表达 (solution expression) 形式的自由.

1996 年，廖世俊等 [33, 34] 在原来的零阶形变方程中引入初始猜测解，将同伦分析方法一般化，得到

$$(1-q)\mathscr{L}[\phi(x;q)-u_0(x)]+q\mathscr{N}[\phi(x;q)]=0,\ q\in[0,1]. \tag{1–2}$$

这提供了选取初始猜测解 (initial guess) 的自由，同时在求解问题的第一步不必再花费时间通过解方程 $\mathscr{L}[u_0(x)]=0$ 获得初始解，进一步简化了同伦分析方法的应用.

1997 年，为了确保同伦分析方法获得的级数解收敛，廖世俊 [35–37] 引入非零辅助参数 c_0[1]，使零阶形变方程更加一般化，得到

$$(1-q)\mathscr{L}[\phi(x;q)-u_0(x)]=c_0q\mathscr{N}[\phi(x;q)]=0,\ q\in[0,1]. \tag{1–3}$$

该辅助参数的引入，虽然形式上比较简单，但对同伦分析方法求得的级数之收敛性具有决定性作用，故在后来的应用中，将其正式命名为控制收敛参数 (convergence-control parameter). 从同伦分析方法的发展上来讲，控制收敛参数的引入具有里程碑意义，这使同伦分析方法与其他解析近似方法从本质上区别开来.

2003 年，廖世俊 [38–40] 在原来基础上进一步引入非零辅助函数 $H(x)$，得到

$$(1-q)\mathscr{L}[\phi(x;q)-u_0(x)]=c_0qH(x)\mathscr{N}[\phi(x;q)]=0,\ q\in[0,1], \tag{1–4}$$

使同伦分析方法能适用于更多的非线性问题的求解. 至此，同伦分析方法提供了选取初始猜测解、辅助线性算子、辅助函数的自由，并可以通过调节控制收敛参数 c_0 来方便地控制解的收敛性. 为了让同伦分析方法的使用变得更加简便，廖世俊 [38, 41] 进一步地提出选取初始猜测解、辅助线性算子和辅助函数的三个基本原则：

[1]最初采用 $\hbar$ 表示，后考虑到与量子力学中的普朗克常量相混淆，改为 c_0，本论文中统一采用后者表示.

(1) 解表达原则 (rule of solution expression)：初始猜测解、辅助线性算子与辅助函数的选取，应该以保证高阶方程的解不违背基函数表达为原则；

(2) 解存在原则 (rule of solution existence)：初始猜测解、辅助线性算子与辅助函数的选取，应该以保证高阶方程解的存在性和唯一性为原则；

(3) 完备性 (系数遍历) 原则 (rule of coefficient ergodicity)：解表达式中的每一项的系数，都应该在逐步求解的过程中不断得到改善.

与此同时，廖世俊研究了同伦分析方法得到的级数解之收敛性，证明了同伦分析方法级数解的收敛定理，即：

定理 1.1 (收敛性定理) 若由同伦分析方法得到的级数解一致收敛，则其必为原始非线性方程的一个解.

2009 年，廖世俊等 [42–45] 系统地给出了关于高阶形变方程 (high-order deformation) 及同伦导数 (homotopy-derivative) 的定理及相关证明，进一步完善了同伦分析方法的理论，为复杂非线性项的处理提供了若干便捷的递归公式，进一步简化并拓展了同伦分析方法的应用.

2010 年，廖世俊 [46] 从理论上证明了著名的欧拉变换 (Euler transform) [47] 实际上包含在同伦分析方法的框架内，这从理论上解释了为什么同伦分析方法可以获得收敛级数解.

2015 年，廖世俊和赵银龙 [48] 提出一种直接定义逆映射的方法 (method of directly defining inverse mapping, MDDiM)，并提出了直接定义逆映射的若干原则，为同伦分析方法的发展开辟了新的研究方向，大大扩充了“辅助线性算子”的范畴.

此外，基于传统的同伦分析方法还发展出了许多新的求解技术. 2005-2010 年，廖世俊 [49]、Abbasbandy [50]、Mosta [51] 等发展了若干寻找非线性问题多解的方法. 2007-2010 年，Yabushita[52]、Marinca [53]、牛照 [54] 以及廖世俊 [55] 等分别发展出了若干优化同伦技术 (optimal HAM)，这些技术给出了通过优化控制收敛参数以及辅助线性算子加快收敛的方法，使同伦分析方法在理论和应用上都得到了很大的推广. 另外，同伦截断技术 (tHAM) [41, 56]、同伦迭代技术 (iHAM) [41, 56] 、同伦谱分析方法 (spectral homotopy analysis method, sHAM) [57–60] 等都是在同伦分析发展中的重要理论成果. 更多理论成果，可参阅关于同伦分析方法的三本英文著作：[38, 41, 61].

1.2.2 同伦分析方法的应用

同伦分析方法是一种普遍适用性非常好的方法，在过去的 24 年里，同伦分析方法吸引了国内外各个领域的学者，应用领域涉及力学、物理学、热学、经济学等，相关的科研成果更是数不胜数. 这里，主要挑选一部分比较有代表性的研究成果予以简单介绍.

2002 年, 廖世俊 [62] 利用同伦分析方法研究了粘性流场中的圆球绕流问题, 得到其粘性阻力的 10 阶解析公式，该公式在大雷诺数区域也与实验结果吻合得较好，被认为是 150 年以来的最佳理论公式 [63]. 同年，廖世俊和 Campo [64] 将同伦分析方法运用于 Brasius 粘性流场中的温度场分布问题的求解，所得到的结果使 Prandtl 数在较大的范围内均能很好地刻画真实的的温度场分布. 2003 年，Ayub 等 [65] 利用同伦分析方法研究了多孔介质中的粘性流动问题；廖世俊 [66] 研究了原子物理中的 Thomas–Fermi 方程，得到的同伦分析解能较好地描述相关物理现象. 2004 年，Hayat 等 [67] 利用同伦分析方法研究了 Oldroyd 六常数流体粘性流动. 2005 年，吴婉和廖世俊 [68] 利用同伦分析方法得到了 Camassa–Holm 的孤立子解. 2006 年, Zhu [69] 利用同伦分析方法获得了用于描述美式期权 (American put option) 的 Black-Scholes 方程的封闭解析解, 成功克服了处理最佳执行边界的困难. 2007 年，Abbasbandy [70] 利用同伦分析方法研究了一般的 Hirota–Satsuma 耦合型 KdV 方程. 2008 年，Tan 等 [71] 利用同伦分析方法求解了二次 Riccati 型微分方程. 2009 年，Hashim 等 [72] 利用同伦分析方法成功求解了一系列分数阶微分方程的初边值问题，得到的同伦分析解与精确解高度吻合，说明了同伦分析方法在分数阶微分方程的求解应用方面具有巨大的潜力. 2010 年，Li 等 [73] 利用同伦分析方法研究了由双耦 Van der Pol 方程控制的自激震荡系统，讨论了所有可能的周期解的频率和幅度，发现该类系统仅存在同相或异相周期解.

2011 年，廖世俊 [74] 采用多参数的同伦分析方法研究了周期行进波的非线性相互作用问题，研究表明：对于一个充分发展的波浪系统，若满足 Phillips [75] 提出的波浪共振条件，则各个波浪分量均具有有限波幅. 该成果同时揭示了多波共振的存在性，并给出了一个比 Phillips 条件更为普遍的多个行进波的共振条件.

2012 年，徐妲莉等 [76] 利用同伦分析方法研究了有限水深中的波浪共振问题，在有限水深下验证了廖世俊 [74] 的结论，并从 Zakharov 方程中得到了

相同的定性结论，这对于深化人们对共振波的理解具有重要意义. 同年，Khan 等 [77] 用同伦分析方法研究了对时间变量为分数阶微分的 Schrödinger 方程，通过与微分变换法 (differential transform method, DTM) 的对比，说明同伦分析方法在该类问题上的求解更高效、更准确，并且更容易推广到高维情形.

2013 年，Guerrero [78] 利用同伦分析方法研究了恒定人群中吸烟习惯的动态演化模型，采用优化收敛控制参数的方法求得其解析近似，成功解释了西班牙吸烟习惯的演化问题，这是同伦分析方法在社会科学领域成功应用的典型范例.

2014 年，刘曾等 [79] 研究了深水中多波相互作用的稳态共振问题，进一步发展了廖世俊 [74] 及徐妲莉等 [76] 关于共振波的研究. 同年，廖世俊 [80] 用同伦分析方法求解了精确波浪方程，提出了描述有限水深中行进波的统一波浪模型 (Unified Wave Model, UWM), 成功解决了公开的理论问题“精确的波浪方程是否能给出不光滑的尖峰孤立波解？”UWM 给出的尖峰孤立波具有一些非常独特的性质. 例如，对传统光滑波浪而言，波浪愈高，其传播速度愈快；然而，有限水深中尖峰孤立波的传播速度却与波高无关. 这对波浪理论中的某些传统观念发起了挑战.

2015 年，崔继峰等 [81] 利用同伦分析方法研究了含绝对值项的非线性周期振动问题，通过 Fourier 展开的方式成功克服了由绝对值项导致的不光滑性，并采用同伦迭代技术加速收敛，获得了非线性周期振动的高精度解析近似. 同年，刘曾等 [82] 首次用实验证实了其于 2014 年发表的关于稳态共振波系之存在理论 [79]，该研究成果大大丰富和完善了共振波浪理论.

1.3 小波理论的发展及其在微分方程中的应用

1.3.1 小波理论的发展

小波 (wavelet) 的概念是由从事石油信号处理的法国地质物理学家 Morlet 在 1981 年首先提出的 [83], 但实际上小波的出现远远早于此. 早在 1909 年，Haar 就构造了一类正交小波基函数，称为 Haar 函数系 [84]. 此后，Haar 函数系经常应用在工程界当中，但由于它不光滑，在理论上并未得到重视与发展 [85]. 1937 年，Littlewood 和 Paley [86] 对 Fourier 级数建立 Littlewood-Paley 理论，提出对频率按照 2 的指数（即 2^j）进行划分，这可以认为是多尺度分析思

想的最早来源. 1984 年，法国地质物理学家 Morlet 和理论物理学家 Grossmann [87] 将函数的平移伸缩性用在平方可积空间 $L^2(\mathbb{R})$ 中，提出小波变换 (wavelet transformation) 的概念. 1985 年，著名数学家 Meyer [83] 证明了一维小波基函数的存在性. 不久，他的学生 Lemarié [88] 把他的结果推广到了高维情形. 1986 年，Meyer 偶然构造出了一个真正的小波基，之后与 Mallat [89] 合作建立了构造小波基的统一方法——多分辨分析 (multiresolution analysis). 此后，小波分析才真正开始蓬勃发展起来.

1988 年，比利时女数学家 Daubechies [90] 构造出了著名的 Daubechies 小波，这是第一次出现有紧支撑性的正交光滑小波. 她在美国 *Communications on Pure and Applied Mathematics*上发表了一篇长达 87 页的论文，被公认为小波分析的纲领性文献. Daubechies 小波的提出，对于小波理论的发展起到了里程碑作用. 此后，Daubechies [91, 92] 应 Coifman [93] 的请求在 Daubechies 小波的基础上进一步构造了 Coiflet 小波，新构造的 Coiflet 小波与 Daubechies 小波相比不仅在小波函数的消失矩上有差异，而且在尺度函数的矩上增加了限制，在应用中存在其独特的优势. 1989 年，法国科学家 Mallat [94] 在小波变换多分辨率分析理论与图像处理的应用研究中受到塔式算法的启发，提出了信号的塔式多分辨率分析与重构的快速算法，现在称为 Mallat 算法. Mallat 算法在小波分析中的地位相当于快速傅立叶变换 (fast Fourier transform, FFT) 在经典傅立叶变换中的地位，为小波分析的应用和发展起到了极大的推动作用. 在随后的发展中，小波作为现代数学的一个重要工具开始被广泛运用到各个学科、各个行业.

1991 年，邓东皋和彭立中 [95] 在《数学进展》上发表“小波分析”，这是国内首次出现的小波论文，很好地推动了国内小波的研究与应用.

之后，小波理论开始全面应用到各个领域，包括：数学领域的诸多学科、信号分析、图像处理、量子力学、理论物理、军事电子对抗与武器的智能化、计算机分类与识别、音乐与语言的人工合成、医学成像与诊断、地震勘探数据处理、大型机械的故障诊断等. 其中，在数学领域，主要运用于数值分析、构造快速数值方法、曲线曲面构造、微分方程求解、控制论等 [85, 96, 97].

1.3.2 微分方程的小波解法

1990 年，Latto 和 Tenenbaum [98] 首次把小波运用到求解偏微分方程中. 之后，小波方法以其高精度、高效率等优势逐渐发展成为微分方程解法中的重

要组成部分. 总的来说，目前存在三大类基于小波理论的微分方程求解方法：小波有限元方法 (wavelet finite difference method) [21–23]、小波配点法 (wavelet collocation method) [24–26] 和小波伽辽金方法 (wavelet-Galerkin method) [27–31]. 其中，小波伽辽金方法与其他两类方法相比在收敛性和稳定性方面具有较为明显的优势 [99–101]，因此受到最广泛的关注与应用.

1994 年，Amaratunga 等 [27] 率先提出小波伽辽金方法，并使用该方法求解了一维 Helmholtz 方程，将结果与其他方法进行比较，说明了小波伽辽金法具有很好的收敛性和较高的求解效率. 1995 年，Restrepo 和 Leaf [102] 利用小波伽辽金方法求解了双曲型微分方程的边值问题. 1997 年，Amaratunga 和 Williams [103] 将小波伽辽金法推广到更为一般的边值问题. 1999 年，Díaz [104] 利用小波伽辽金方法研究了二维热传导方程的边值问题. 2002 年，Kim 和 Jang [105] 基于插值小波提出一种自适应的多尺度小波伽辽金方法，并用该方法分析了薄壁梁的结构响应问题. 2004 年，Jang 等 [106] 进一步采用多尺度小波伽辽金方法分析了二维椭圆型方程的边值问题. 2006 年，Lepik [107] 采用基于 Haar 函数系的小波伽辽金方法求解了复合型微分方程的边值问题. 2009 年，Winter [108] 利用小波伽辽金方法求解了多维度的 Lévy 模型，并基于此研究了期权定价问题. 2010 年，Liu 等 [101] 利用 Daubechies 小波伽辽金方法求解了一系列二维弹性力学问题. 2011 年，Mohammadi [109] 采用 Legendre 小波伽辽金方法求解了一系列微分方程问题. 2016 年，Kestler 等 [110] 采用一种对时间和空间自适应的小波伽辽金方法求解了抛物型偏微分方程，并指出该方法在这类问题的求解上具有快速收敛的优势.

值得一提的是，在 1998 年至今 10 几年的时间里，周又和与王记增等 [29, 111–115] 在传统 Coiflet 小波基础上通过对尺度函数矩的限制发展出一种新的小波，即广义 Coiflet 小波. 他们将广义 Coiflet 小波与牛顿迭代法结合在一起提出了一种求解非线性微分方程的小波伽辽金方法，并将该方法广泛地运用到非线性力学问题的求解上. 本论文中所使用的正是广义 Coiflet 小波，更多关于该类小波的知识，将在第二章进行详细介绍.

1.4 发展新方法的动机

从上文的介绍可以看到，同伦分析方法发展至今已经形成了一个系统的理论体系，它在各个领域非线性问题的求解中也展现出其独有的优势和巨大的潜

力. 相对于其他的解析近似方法，同伦分析方法主要有以下三大优势：

(1) 不依赖于任何小 (大) 物理参数；

(2) 通过调节收敛控制参数 c_0 可以很方便地控制解的收敛；

(3) 具有选择初始猜测解、辅助线性算子及解表达的自由与灵活性.

这些优势已被大量的优秀科研成果和广泛的应用实例所证实，而同伦分析方法之所以能够有如此强大的生命力和吸引力，除了其固有的优势以外，更重要的是其提出者、继承者和使用者在运用该方法的同时，能始终从发展的角度来对待同伦分析方法，不断挖掘其中的不足予以弥补，不断发现其可拓展空间予以推广，在理论方面不断深入，在应用方面不断改进和完善.

尽管同伦分析方法现在已经发展到了一个比较成熟的阶段，但该方法同样还有一些可以完善和拓展的空间，其中最重要的是：

(1) 由于原方程本身的非线性性，随着阶数的增加，高阶形变方程的右端项急剧膨胀. 对于一些强非线性问题，右端项的计算复杂度甚至随着阶数的增加达到指数级增长 [41, 56]. 这样会导致两个不利的后果：一是计算效率下降，计算时间急剧增加；二是对于一些极端情况，如强非线性偏微分方程问题，由于其本身收敛速度就很慢，要想获得较为精确地结果，计算高阶近似势在必行，但右端项恶性膨胀对此构成较大的限制.

(2) 虽然同伦分析方法本身提供了选择线性算子与解表达的自由，但这种自由仍然是有限制的，其中最大的限制就是解表达原则，这导致基函数与解表达形式的选择是强依赖于辅助线性算子的. 例如，所选线性算子为 $\mathscr{L}[\phi] = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \phi$，则相应地就要选择三角函数作为基函数；否则，若选择 $\mathscr{L}[\phi] = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \phi$ 作为线性算子的同时选择幂函数或者指数函数作为基函数，则不能获得正确的解析近似. 另外，若选择的辅助线性算子 (尤其是变系数的辅助线性算子) 具有比较复杂的通解形式或者其逆算子很难求得，则极有可能导致该线性算子是低效甚至是无效的.

(3) 原则上，同伦分析方法可以使用任何类型的函数作为基函数，目前同伦分析方法中常用的基函数类型有：幂函数 (如 x^n)、三角函数 ($\sin(nx)$)、指数函数 (如 e^{-nx})、幂 -指混合函数 (如 $x^m \mathrm{e}^{-nx}$) 以及从幂函数正交化后

得到的正交多项式等. 虽然形式多样，但单从运算的角度来讲，各种基函数的运算效率是有很大差异的. 例如：一般来说，幂函数的运算效率高于指数函数，指数函数的运算效率高于三角函数等. 是否提供更多高效的选择，也是同伦分析方法中值得进一步研究的问题.

从各类求解方法的发展，以及上述的问题来看，可以发现：基函数的选择对获得非线性微分方程解的快速逼近起着至关重要的作用. 正因为如此，本论文旨在发展这样一种基于同伦分析的求解方法：

(1) 基函数与解表达对辅助线性算子的选取不敏感，也就是说基函数对不同的辅助线性算子有更强的适应性. 这样，相对于传统的同伦分析方法，辅助线性算子的选取将变得更加自由，也更加容易.

(2) 能够有效控制高阶形变方程右端项的恶性膨胀，从而大大提高计算效率，并能很容易地求得高阶近似.

(3) 能提供一种便捷的方式来根据需求平衡效率和精度之间的关系，让使用者能以更加高效的方式获得一个可接受的解.

为了实现这样的目的，笔者考虑将同伦分析方法与现代数学前沿的工具——小波相结合. 在小波的选择方面主要考虑的性质是正交性、紧支性、插值性、在函数逼近中具有较高的代数精度、能够很方便地在不同分辨率水平下进行函数逼近等 [116]. 尽管小波研究者期望这个工具是完美的，但现在已经证明，小波不可能同时兼备正交性、紧支性、插值性 [20]. 目前使用的较为广泛的 Daubechies 正交小波虽在紧支性和光滑性之间达到了最佳平衡，但不具备插值性. 所以，王记增在研究中根据实际需要，在 Coiflet 小波的基础上通过扩大其紧支集换得准插值性，构造了一类正交准插值小波，称为广义正交 Coiflet 小波. 由于广义 Coiflet 小波具有良好的性质，所以本论文中选择该类小波作为结合工具，实现上述提出的目标.

1.5 本论文的主要工作

本论文中主要结合同伦分析方法和广义 Coiflet 小波，提出了一种求解非线性边值问题的新方法——小波同伦分析方法 (wavelet homotopy analysis method,

wHAM)，并以 Bratu 方程为范例，介绍该方法的基本思想和主要算法步骤，同时针对该方法在应用过程中所面临的几个重要问题进行探讨，并给出一般性的解决方案. 具体来说：

1. 第一章主要介绍了该论文的研究动机，并对同伦分析方法的理论发展和应用现状以及小波理论的发展历程和在微分方程求解中的应用做简要回顾，同时介绍了本论文的研究目的和意义、主要内容和创新点；

2. 第二章简要介绍多分辨分析和广义 Coiflet 小波相关的基本知识，并给出本论文中用到的一些重要数学定义及相关运算性质；

3. 第三章主要以一维 Bratu 方程为范例，介绍小波同伦分析方法在常微分方程求解中的基本思想和主要算法步骤，并通过计算结果验证和分析该方法在非线性常微分方程边值问题求解中的有效性和主要优势；

4. 第四章介绍利用小波同伦分析方法寻找多解的一种策略，并通过计算结果验证该策略的有效性；

5. 第五章主要以二维 Bratu 方程为范例，介绍小波同伦分析方法在偏微分方程求解中的基本算法与步骤，并针对高维问题中偏导数的计算问题提出一种基于截面曲线的快速小波算法，最后结合计算结果分析该方法在非线性偏微分方程边值问题求解中的有效性和主要优势；

6. 第六章介绍利用小波处理科学与工程中常见的三大类非齐次边界条件及混合边界条件的一般性方法，并通过计算实例验证这套方法的有效性；

7. 第七章针对变系数微分方程的求解提出了一套克服复杂连接系数的一般性方法，提出并证明了该方法的几个基本定理，并在基本定理的基础上，提出求解变系数微分方程的广义小波伽辽金方法，最后通过计算实例验证广义小波伽辽金方法的有效性，并分析其主要优势；

8. 第八章对本论文的工作进行了总结，并对小波同伦分析方法相关的研究进行展望.

1.6 主要创新点

本论文的主要创新点在于:

1. 首次将同伦分析方法与现代前沿的数学理论——小波分析进行结合，提出一种求解非线性边值问题的一般性方法，即小波同伦分析方法;
2. 通过构造含参变量边值问题的方法，成功利用小波同伦分析方法寻找多解;
3. 针对偏微分方程边值问题中偏导数的计算问题，提出一种基于截面曲线的快速小波算法;
4. 针对常见的三大类非齐次边界条件及混合边界条件，给出了一套用小波处理的一般性方法;
5. 提出并证明了若干基本定理，并在这些基本定理的基础上，发展出求解变系数微分方程的广义小波伽辽金方法.

第二章　基本小波理论与重要数学定义

本章简要介绍与本论文相关的一些基本小波理论，包括多分辨分析的基本概念、广义 Coiflet 小波的基本性质、小波基函数与小波逼近，以及小波同伦分析方法中比较重要的连接系数的计算方法. 最后，给出本论文中用到的一些重要数学定义及其相关运算性质.

2.1　多分辨分析

多分辨分析 (multiresolution analysis) 的概念最早是在 1989 年由 Mallat [94] 提出的，该概念的提出在小波分析的基础理论方面具有重要的里程碑意义，它统一了此前提出的诸多小波的构造方法，为小波分析提供了一个统一的数学框架. 本论文中，广义 Coiflet 正交小波基函数与函数空间的构造正是基于多分辨分析. 多分辨分析的基本定义如下：

定义 2.1 (多分辨分析) 平方可积空间的一串函数子空间序列集合$\{\mathbb{V}_j, j \in \mathbb{Z}\}$ 若满足以下五个条件，则称为多分辨分析.

$$(1)\ \mathbb{V}_j \subset \mathbb{V}_{j+1}; \tag{2–1}$$

$$(2)\ \overline{\bigcup_{j\in\mathbb{Z}} \mathbb{V}_j} = L^2(\mathbb{R}); \tag{2–2}$$

$$(3)\ \bigcap_{j\in\mathbb{Z}} \mathbb{V}_j = \{0\}; \tag{2–3}$$

$$(4)\ f(x) \in \mathbb{V}_j \Leftrightarrow f(2x) \in \mathbb{V}_{j+1}; \tag{2–4}$$

$$(5)\ \exists\, \varphi(x) \in \mathbb{V}_0,\ s.t.\ \mathbb{V}_0 = span\{\varphi(x-k), k \in \mathbb{Z}\}. \tag{2–5}$$

其中，$\{\varphi(x-k), k \in \mathbb{Z}\}$ 是按照平方可积空间的内积定义的标准正交基. 以上的五个条件分别称为：嵌套性、稠密性、独立性、缩放性、规范正交性. 在小波分析的理论中，整数参数 j 称为**分辨率水平 (resolution level)**，函数 $\varphi(x)$ 称为**尺度函数 (scaling function)**.

2.2　广义 Coiflet 小波的基本性质

广义 Coiflet 小波是由王记增 [112] 在经典的 Coiflet 族小波 [117] 的基础上经过修改尺度函数矩的性质得到的，由其尺度函数 (scaling function) $\varphi(x)$ 和小波函数 (wavelet function) $\psi(x)$ 共同定义. 它们具有以下性质 [112, 115]:

$$(a)\ \varphi(x) = \sum_{k=0}^{3N-1} p_k \varphi(2x-k); \tag{2–6}$$

$$(b)\ \psi(x) = \sum_{k=0}^{3N-1} (-1)^k p_{3N-1-k} \psi(2x-k); \tag{2–7}$$

$$(c)\ M_n = M_1^n, \quad for\ 0 \le n < N; \tag{2–8}$$

$$(d)\ \int_{-\infty}^{+\infty} x^n \psi(x) \mathrm{d}x = 0, \quad for\ 0 \le n < N; \tag{2–9}$$

$$(e)\ \sum_{k\in\mathbb{Z}} p_k \varphi(x-k) = 1; \tag{2–10}$$

其中 p_k 为低通滤波系数, N 为消失矩数, $M_n = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n \varphi(x)\mathrm{d}x$ 为尺度函数的 n 阶矩. 性质 (a) 和 (b) 分别为尺度函数和小波函数的双尺度关系，它们在小波基函数求值、求导以及积分等算法中具有重要作用；性质 (c) 为尺度函数矩的特性，它是广义 Coiflet 小波与传统 Coiflet 小波之间的根本差异；性质 (d) 是小波函数的消失矩特性，它决定了尺度函数的紧支撑性，且对小波逼近的代数精度起到决定性作用；性质 (e) 则是小波的正规化条件.

对于广义 Coiflet 小波来说，尺度函数和小波函数均具有**正交性 (orthogonality)**，即对任意的整数 k 和 l，满足:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x-k)\varphi(x-l)\mathrm{d}x = \delta_{kl}, \tag{2–11}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x-k)\psi(x-l)\mathrm{d}x = \delta_{kl}, \tag{2–12}$$

其中 δ_{kl} 为 Kronecker 符号，其定义为:

$$\delta_{kl} = \begin{cases} 1, & k = l, \\ 0, & k \ne l. \end{cases} \tag{2–13}$$

此外，尺度函数 $\varphi(x)$ 甚至可以达到 4 阶连续可导，具有很好的**光滑性 (smoothness)**；它还具有**紧支性 (compactly-support)**，其紧支集为 $supp[\varphi(x)] =$

$[0, 3N-1]$. 尺度函数的正交性、光滑性和紧支性对小波逼近及其在求解微分方程中具有重要意义.

不失一般性，本论文中统一采用消失矩数为 $N=6$，尺度函数的一阶矩为 $M_1=7$ 的广义 Coiflet 正交小波，其滤波系数 p_k [118] 由表 2–1给出，尺度函数的图像如图 2–1所示.

表 2–1 消失矩数为 $N=6$，尺度函数的一阶矩为 $M_1=7$ 时, 广义 Coiflet 正交小波的低通滤波系数 p_k.

Table 2–1 Low-pass filter coefficients p_k of the generalized Coiflet-type orthogonal wavelet in case of the number of vanishing moment $N=6$ and the first-order moment of the scaling function $M_1=7$.

k	p_k	k	p_k
0	$-2.3926386572801\times10^{-3}$	9	$-9.9615433862400\times10^{-2}$
1	$-4.9326018541804\times10^{-3}$	10	$-7.9923139434800\times10^{-2}$
2	$2.7140399711400\times10^{-2}$	11	$5.1491462932400\times10^{-2}$
3	$3.0647555946200\times10^{-2}$	12	$1.2388695657060\times10^{-2}$
4	$-1.3931023707080\times10^{-1}$	13	$-1.5831780392559\times10^{-2}$
5	$-8.0606530717800\times10^{-2}$	14	$-2.7171786005400\times10^{-3}$
6	$6.4599454329399\times10^{-1}$	15	$2.8869486640200\times10^{-3}$
7	$1.1162662132580\times10^{0}$	16	$6.3049939470800\times10^{-4}$
8	$5.3818905570800\times10^{-1}$	17	$-3.0583397359600\times10^{-4}$

2.3 L^2 函数的广义 Coiflet 小波逼近

2.3.1 $L^2(\mathbb{R})$ 上的小波逼近

采用上文提到的广义 Coiflet 正交小波的尺度函数 $\varphi(x)$，可构造出 $L^2(\mathbb{R})$ 空间的一个多分辨分析，它包含了一族依次嵌套的子空间 $\{0\}\subset\cdots\subset\mathbb{V}_0\subset\mathbb{V}_1\subset\mathbb{V}_2\subset\cdots\subset\mathbb{V}_j\subset\mathbb{V}_{j+1}\subset\cdots\subset L^2(\mathbb{R})$. 分辨率水平 j 对应的子空间 $\mathbb{V}_j$ 定义为:

$$\mathbb{V}_j = span\left\{\varphi(2^j x-k),\ k\in\mathbb{Z}\right\}. \tag{2–14}$$

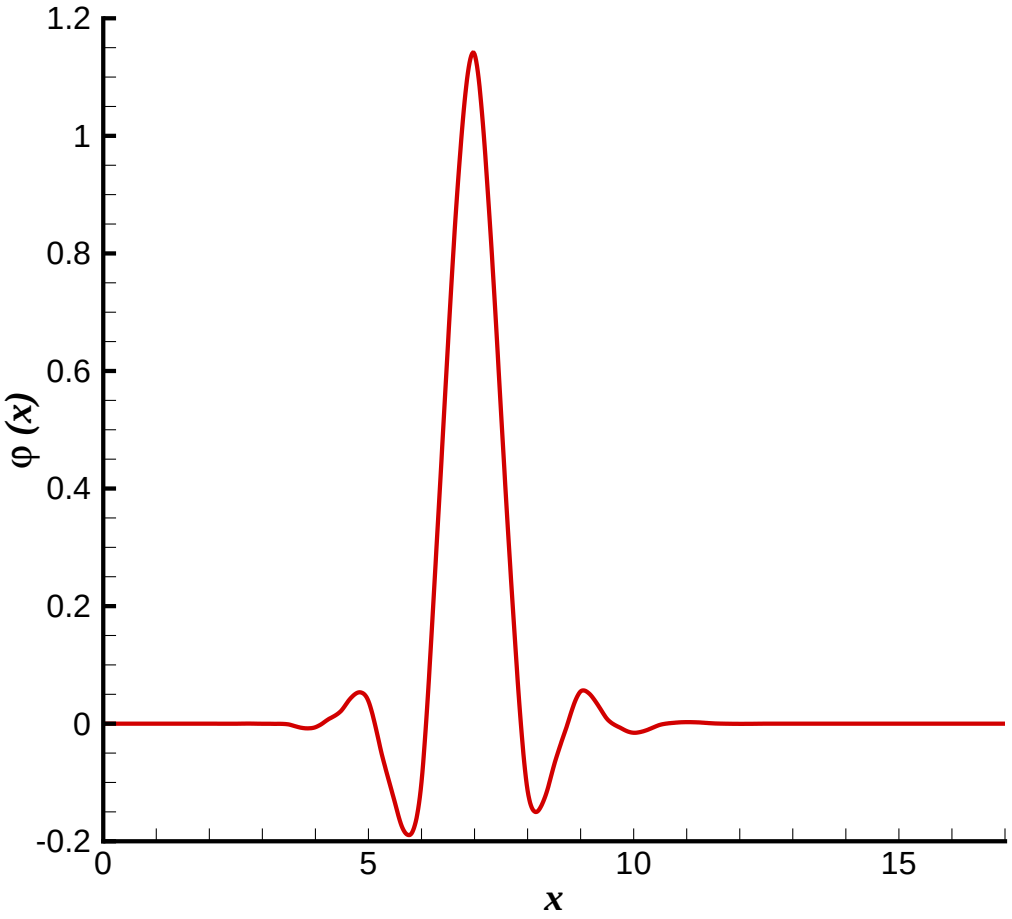

图 2–1 消失矩数为 $N = 6$，尺度函数的一阶矩为 $M_1 = 7$ 时广义正交 Coiflet 小波的尺度函数.

Fig. 2–1 The scaling function of the generalized Coiflet-type orthogonal wavelet in case of the number of vanishing moment $N = 6$ and the first order moment of the scaling function $M_1 = 7$.

根据广义 Coiflet 小波的正交性，$\mathbb{V}_j$ 中的所有基函数相互正交. 按照函数逼近理论，任意一个函数 $f(x) \in L^2(\mathbb{R})$ 可以在子空间 $\mathbb{V}_j$ 中得到广义 Fourier 逼近

$$f(x) \approx \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_{jk}\varphi(2^j x - k), \tag{2–15}$$

其中尺度系数 $c_{jk} = 2^{-j}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(2^j x - k)\mathrm{d}x$.

对于一般的小波，通常只能用上述的表达式进行函数逼近，但对于广义 Coiflet 小波，周又和与王记增 [119] 提出了一套计算尺度系数 c_{jk} 的广义高斯积分方法，利用广义高斯积分方法，得到：

$$c_{jk} \approx f\left(\frac{M_1+k}{2^j}\right), \tag{2–16}$$

该式虽然不是严格相等，但已足够在计算中提供非常高的精度. 因此，小波逼近 (2–15) 可以改写为：

$$f(x) \approx P^j f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{M_1+k}{2^j}\right)\varphi(2^j x-k), \tag{2–17}$$

其中 j 为分辨率水平，P^j 为 L^2 函数在空间 $\mathbb{V}_j$ 中的投影算子.

这样，任意给定一个 L^2 函数，只要通过简单的函数值采样即可完成函数逼近，使得逼近效率大大提高. 表达式 (2–17) 的建立，实际上确立了广义 Coiflet 小波的**拟插值性 (quasi-interpolation)** (形式上为插值，实质为广义 Fourier 逼近).

综合 2.2 节可知：广义 Coiflet 小波具有正交性、紧支性、光滑性和拟插值性，这正是本论文中选择广义 Coiflet 小波的主要原因.

2.3.2　$L^2[0,1]$ 上的小波逼近

在实际边值问题的求解应用当中，通常需要用到有限区间上的小波逼近，而任何有限区间上的问题都可以通过伸缩和平移变换转化到 $[0,1]$ 上. 不失一般性，本论文中直接考虑 $L^2[0,1]$ 上函数的小波逼近. 针对有限区间上函数逼近的问题，王记增等 [112, 120] 提出了一套基于 Taylor 展开和差分方法的边界延拓技术，即对任意的函数 $f(x)\in L^2[0,1]$，采用边界延拓

$$\widetilde{f}(x)=\begin{cases}\displaystyle\sum_{i=0}^{3}\frac{d_{0,i}}{i!}x^i, & x\in(-\delta,0),\\ f(x), & x\in[0,1],\\ \displaystyle\sum_{i=0}^{3}\frac{d_{1,i}}{i!}(x-1)^i, & x\in(1,1+\delta),\end{cases} \tag{2–18}$$

其中，系数 $d_{0,i}$ 和 $d_{1,i}$ 用半边四点差分格式计算，如下：

$$\begin{cases} d_{0,i} = \sum_{k=1}^{3} p_{0,i,k} f_{j,k}, \\ d_{1,i} = \sum_{k=1}^{3} p_{1,i,k} f_{j,2^j-k}, \end{cases} \tag{2–19}$$

其中，$f_{j,k} = f\left(\frac{k}{2^j}\right)$，差分系数通过关系 $\mathbf{P_0} = \{2^{-ij} p_{0,i,k}\}$ 和 $\mathbf{P_1} = \{2^{-ij} p_{1,i,k}\}$，$i,k = 0,1,2,3$，由下面的矩阵确定 [112]：

$$\mathbf{P_0} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -11/6 & 3 & -3/2 & 1/3 \\ 2 & -5 & 4 & -1 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{bmatrix}, \tag{2–20}$$

$$\mathbf{P_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 11/6 & -3 & 3/2 & -1/3 \\ 2 & -5 & 4 & -1 \\ 1 & -3 & 3 & -1 \end{bmatrix}. \tag{2–21}$$

于是，考虑到尺度函数具有紧支集 $[0, 3N-1]$，对于函数 $f(x) \in L^2[0,1]$，逼近表达式 (2–17) 可改写为

$$f(x) \approx \sum_{k=2-3N+M_1}^{2^j-1+M_1} \widetilde{f}\left(\frac{M_1+k}{2^j}\right) \varphi(2^j x - k), \quad x \in [0,1]. \tag{2–22}$$

根据以上的边界延拓，重新定义小波基函数为：

$$\varphi_{j,k}(x) = \begin{cases} \sum_{i=2-3N+M_1}^{-1} T_{0,k}\left(\frac{i}{2^j}\right) \varphi(2^j x - i + M_1) + \varphi(2^j x - k + M_1), \\ \qquad\qquad k \in [0,3], \\ \varphi(2^j x - k + 7), \qquad\qquad k \in [4, 2^j - 4], \\ \sum_{i=2^j+1}^{2^j-1+M_1} T_{1,2^j-k}\left(\frac{i}{2^j}\right) \varphi(2^j x - i + M_1) + \varphi(2^j x - k + M_1), \\ \qquad\qquad k \in [2^j - 3, 2^j], \end{cases} \tag{2–23}$$

其中，函数 $T_{0,k}(x)$ 和 $T_{1,k}(x)$ 定义为：

$$T_{0,k}(x)=\sum_{i=0}^{3}\frac{p_{0,i,k}}{i!}x^i\ ,\ T_{1,k}(x)=\sum_{i=0}^{3}\frac{p_{1,i,k}}{i!}(x-1)^i. \tag{2–24}$$

根据新定义的小波基函数，函数 $f(x)\in L^2[0,1]$ 的逼近表达式 (2–22) 可进一步简写为

$$f(x)\approx P^jf(x)=\sum_{k=0}^{2^j}f\left(\frac{k}{2^j}\right)\varphi_{j,k}(x), \tag{2–25}$$

其中 P^j 为 L^2 函数向空间 $\mathbb{V}_j$ 的投影算子. 对 (2–25) 式进行求导，可以得到 $f(x)$ 导数的小波逼近为：

$$\frac{\mathrm{d}^nf(x)}{\mathrm{d}x^n}\approx\frac{\mathrm{d}^nP^jf(x)}{\mathrm{d}x^n}=\sum_{k=0}^{2^j}f\left(\frac{k}{2^j}\right)\frac{\mathrm{d}^n\varphi_{j,k}(x)}{\mathrm{d}x^n}, \tag{2–26}$$

其中基函数的导数 $\frac{\mathrm{d}^n\varphi_{j,k}(x)}{\mathrm{d}x^n}$ 可以采用王继增在文献 [112] 中给出的高精度计算方法求得.

根据文献 [31, 115, 121], 小波逼近 (2–25) 的误差可由下面的引理来估计.

引理 2.1 若 $f(x)\in L^2[0,1]\bigcap C^N(0,1)$，则对小波逼近 (2–26) 有下式成立：

$$\left\|\frac{\mathrm{d}^nf(x)}{\mathrm{d}x^n}-\frac{\mathrm{d}^nP^jf(x)}{\mathrm{d}x^n}\right\|_{L^2[0,1]}\leq C2^{-j(N-n)}, \tag{2–27}$$

其中 C 是只与函数 $f(x)$ 和低通滤波系数 p_k 相关的非负常数, N 为消失矩数, 且 $0\leq n<N$. 当 $n=0$ 时，上式即为小波逼近 (2–25) 的误差估计. 从**引理 2.1**可以看出，通过提高分辨率水平 j，可以显著提高小波逼近的精度.

2.3.3 $L^2[0,1]^2$ 上的小波逼近

对于二维情形，考虑 $L^2[0,1]^2$ 空间上的小波逼近. 根据高维多分辨分析理论 [83]，二维多分辨分析可直接通过一维多分辨分析的张量积来构造. 即：

$$\mathbb{V}_j^2=\mathbb{V}_j\otimes\mathbb{V}_j. \tag{2–28}$$

这样，任意一个函数 $f(x,y)\in L^2[0,1]^2$, 可由下式进行逼近：

$$f(x,y)\approx P^jf(x,y)=\sum_{k=0}^{2^j}\sum_{l=0}^{2^j}f\left(\frac{k}{2^j},\frac{l}{2^j}\right)\varphi_{j,k}(x)\varphi_{j,l}(y). \tag{2–29}$$

相应的导数逼近为:

$$\frac{\partial^{m+n} f(x,y)}{\partial x^m \partial y^n} \approx \frac{\partial^{m+n} P^j f(x,y)}{\partial x^m \partial x^m} = \sum_{k=0}^{2^j}\sum_{l=0}^{2^j} f\left(\frac{k}{2^j},\frac{l}{2^j}\right)\frac{\mathrm{d}^m \varphi_{j,k}(x)}{\mathrm{d}x^m}\frac{\mathrm{d}^n \varphi_{j,l}(y)}{\mathrm{d}y^n}. \tag{2–30}$$

相应地，从**引理 2.1**可以得到，二维小波逼近 (2–30) 的误差可由下面的引理来估计.

引理 2.2[1] 若 $f(x,y) \in L^2[0,1]^2 \bigcap C^{N,N}(0,1)^2$ ，则对小波逼近 (2–30) 有下式成立:

$$\left\| \frac{\partial^{m+n} f(x,y)}{\partial x^m \partial y^n} - \frac{\partial^{m+n} P^j f(x,y)}{\partial x^m \partial y^n} \right\|_{L^2[0,1]^2} \le C 2^{-\min\{j(N-m),j(N-n)\}}, \tag{2–31}$$

其中 C 是只与函数 $f(x,y)$ 和低通滤波系数 p_k 相关的非负常数, N 为消失矩数, 且 $0 \le m,n < N$. 当 $m = n = 0$ 时，上式即为小波逼近 (2–29) 的误差估计.

2.4 连接系数的计算方法

所谓**连接系数 (connection coefficients)** [116]，是指小波基函数及其导数的乘积、或者某个已知函数与小波基函数及其导数的乘积在给定区间上的积分值. 连接系数的计算，在小波方法中占据着极其重要的地位，故在此予以简要说明.

本论文中提出的所有算法，均仅涉及到最简单形式的连接系数的计算，即:

$$\Gamma_{k,l}^{j,n} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}^n \varphi_{j,k}(x)}{\mathrm{d}x^n} \varphi_{j,l}(x)\mathrm{d}x. \tag{2–32}$$

根据小波基函数的形式，上述积分的计算可以归结为计算以下积分

$$\overline{\Gamma}_{k,l}^{j,n} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}^n \varphi(2^j x - k)}{\mathrm{d}x^n} \varphi(2^j x - l)\mathrm{d}x. \tag{2–33}$$

进一步地，令 $\xi = 2^j x - l$，则[2]

$$\overline{\Gamma}_{k,l}^{j,n} = 2^{j(n-1)} \int_{-l}^{2^j - l} \frac{\mathrm{d}^n \varphi(\xi - k + l)}{\mathrm{d}x^n} \varphi(\xi)\mathrm{d}\xi. \tag{2–34}$$

[1]符号说明：本论文中，$C^{N,N}(0,1)^2$ 表示在开区域 $(0,1)\times(0,1)$ 上关于两个维度的自变量均 N 次连续可导的函数构成的空间.

[2]王记增 [112] 和刘小靖 [115] 给出的公式存在笔误，这里予以改正.

因此，连接系数问题最终归结为计算以下积分函数

$$\Lambda_k^n(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}^n \varphi(\xi - k)}{\mathrm{d}\xi^n} \varphi(\xi) \mathrm{d}\xi. \tag{2–35}$$

若上述积分函数在整数点上的函数值均已计算出来，则

$$\overline{\Gamma}_{k,l}^{j,n} = 2^{j(n-1)} \left[\Lambda_{k-l}^n (2^j - l) - \Lambda_{k-l}^n (-l) \right]. \tag{2–36}$$

由于广义 Coiflet 小波的尺度函数 $\varphi(x)$ 不具有解析表达式，而且其导函数 $\frac{\mathrm{d}^n \varphi(x)}{\mathrm{d}x^n}$ 高频震荡，故没法通过解析方法获得上述积分的一般表达式，也没法使用传统的数值积分方法获得上述积分的值. 不过，由于广义 Coiflet 小波具有紧支性，而且通常遇到的微分方程的阶数不会超过 4 阶，故实际上需要计算的 $\Lambda_k^n(x)$ 值的个数是有限的. 关于 $\Lambda_k^n(x)$ 的计算，王记增 [112] 根据双尺度关系，类似于 Chen [116] 的做法，给出了一种高精度计算方法，更加详细的算法可参考文献 [112].

关于更复杂连接系数的计算，至今在学术界仍未给出一个通用的计算方法. 这个问题关乎本论文提出的小波同伦分析方法及传统小波伽辽金方法的发展与应用，是一个十分重要和有意义的问题. 本论文中，笔者提出了一个新的方法用以克服一般性复杂连接系数，并在该方法的基础上发展出广义小波伽辽金方法，这将在后面的拓展章节中做详细的介绍和讨论.

2.5　几个重要的数学定义

以下是后续章节中用到的几个重要的数学定义及其相关的运算性质：

定义 2.2 (Hadamard / Schur 乘积) 若矩阵 $\mathbf{A} = \{a_{kl}\}_{m\times n}$, $\mathbf{B} = \{b_{kl}\}_{m\times n} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ (当 $m = 1$ 或 $n = 1$ 时为向量)，则它们的 Hadamard / Schur 乘积定义为：

$$\mathbf{A} \circ \mathbf{B} = \{c_{kl} = a_{kl} b_{kl}\}_{m\times n}. \tag{2–37}$$

定义 2.3 (列点乘积) 若矩阵 $\mathbf{A} = \{a_{kl}\}_{m\times n} \in \mathbb{R}^{m\times n}$，向量 $\mathbf{v} = \{v_l\}_{n\times 1} \in \mathbb{R}^n$，则它们的列点乘积定义为：

$$\mathbf{A} \odot \mathbf{v} = \{c_{kl} = a_{kl} v_l\}_{m\times n}. \tag{2–38}$$

定义 2.4 (拉直算子) 若矩阵 $\mathbf{A}=\{a_{kl}\}_{m\times n}\in\mathbb{R}^{m\times n}$，则算子 $vec(\cdot)$ 将矩阵 **A** 按列拉直为 mn 维向量，即：

$$vec(\mathbf{A})=\mathbf{v}=\{v_r\}_{mn\times 1},\ \ v_{k+(l-1)m}=a_{kl}. \tag{2–39}$$

类似地，算子 $rvec(\cdot)$ 将矩阵 **A** 按行拉直为 mn 维向量，即：

$$rvec(\mathbf{A})=\mathbf{v}=\{v_r\}_{mn\times 1},\ \ v_{(k-1)n+l}=a_{kl}. \tag{2–40}$$

定义 2.5 (Kronecker 张量积) 若矩阵 $\mathbf{A}=\{a_{kl}\}_{m\times n}\in\mathbb{R}^{m\times n}$，矩阵 $\mathbf{B}=\{b_{kl}\}_{p\times q}\in\mathbb{R}^{p\times q}$，则它们的 Kronecker 张量积定义为：

$$\mathbf{A}\otimes\mathbf{B}=\{a_{kl}\mathbf{B}\}_{mp\times nq}. \tag{2–41}$$

性质 2.1 若矩阵 $\mathbf{A},\mathbf{B}\in\mathbb{R}^{m\times n}$，则

$$vec(\mathbf{A}\circ\mathbf{B})=vec(\mathbf{A})\circ vec(\mathbf{B}), \tag{2–42}$$

$$rvec(\mathbf{A}\circ\mathbf{B})=rvec(\mathbf{A})\circ rvec(\mathbf{B}). \tag{2–43}$$

性质 2.2 若矩阵 $\mathbf{A}\in\mathbb{R}^{m\times n}$，向量 $\mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathbb{R}^{n}$，则：

$$\mathbf{A}\left(\mathbf{u}\circ\mathbf{v}\right)=\left(\mathbf{A}\odot\mathbf{u}\right)\mathbf{v}. \tag{2–44}$$

性质 2.3 若矩阵 $\mathbf{A}\in\mathbb{R}^{m\times n}$，矩阵 $\mathbf{B}\in\mathbb{R}^{p\times q}$，则：

$$(\mathbf{A}\otimes\mathbf{B})^T=\mathbf{A}^T\otimes\mathbf{B}^T, \tag{2–45}$$

其中 $(\cdot)^T$ 为矩阵的转置算子.

性质 2.4 若矩阵 $\mathbf{A}\in\mathbb{R}^{m\times p}$，$\mathbf{X}\in\mathbb{R}^{p\times q}$，$\mathbf{B}\in\mathbb{R}^{q\times n}$，则：

$$vec\left(\mathbf{AXB}\right)=\left(\mathbf{B}^T\otimes\mathbf{A}\right)vec\left(\mathbf{X}\right), \tag{2–46}$$

$$rvec\left(\mathbf{AXB}\right)=\left(\mathbf{A}\otimes\mathbf{B}^T\right)rvec\left(\mathbf{X}\right). \tag{2–47}$$

2.6 本章小结

本章首先给出了小波分析中的重要概念——多分辨分析，并在此基础上介绍了广义 Coiflet 小波的主要性质，结合尺度函数的性质给出了广义 Coiflet 小波基函数的构造以及 L^2 函数的小波逼近，然后简要介绍了小波方法中最为重要连接系数的计算方法，最后定义了一些数学运算并给出了相关的运算性质，为后续的关于小波同伦分析方法及其拓展的介绍做了理论上的准备.

第三章　解非线性常微分方程的小波同伦分析方法

本章主要以一维 Bratu 方程 [122–124] 为模型，介绍求解非线性常微分方程边值问题的小波同伦分析方法 (wavelet homotopy analysis method, wHAM) 之基本思想与算法步骤，提出了小波同伦分析方法中初始猜测解和辅助线性算子选取的基本原则，通过计算结果来验证小波同伦分析方法的有效性，并分析其主要优势.

3.1　小波同伦分析方法的基本思想

小波同伦分析方法的基本思想是：在同伦分析方法的框架下，以建立在广义 Coiflet 小波之上多分辨分析为基础，结合广义 Coiflet 小波逼近，对非线性微分方程进行求解. 本节以一维 Bratu 方程 [122–124] 为模型来阐述求解非线性常微分方程的小波同伦分析方法之基本思想与算法.

3.1.1　问题描述

Bratu 方程广泛应用于描述反应扩散问题、传热问题、纳米技术、宇宙膨胀过程及其他诸多物理问题 [122, 125]，其一维形式的控制方程为：

$$\frac{\mathrm{d}^2u(x)}{\mathrm{d}x^2}+\lambda \mathrm{e}^{u(x)}=0, \qquad x\in(0,1), \tag{3–1}$$

边界条件为：

$$u(0)=u(1)=0, \tag{3–2}$$

其中，λ 是一个大于 0 的参数，即 Frank-Kamenetskii 参数 [122].

根据文献 [122–124]，一维 Bratu 方程解的存在情况如下：

(1) 当 $0<\lambda<\lambda_c$ 时，存在上下两支解；

(2) 当 $\lambda=\lambda_c$ 时，存在唯一解；

(3) 当 $\lambda>\lambda_c$ 时，无解；

其中，λ 的临界值 $\lambda_c \approx 3.513830719$. 为了简便，本章先讨论一维 Bratu 方程在 $0 < \lambda < \lambda_c$ 时的下支解.

一维 Bratu 方程是一个具有精确解析解的强非线性问题. 当 $0 < \lambda < \lambda_c$ 时，其精确解由下式给出：

$$u(x) = -2\ln\left[\frac{\cosh(\frac{\theta}{2}(x-\frac{1}{2}))}{\cosh(\frac{\theta}{4})}\right], \tag{3–3}$$

其中 θ 是以下代数方程的解：

$$\theta = \sqrt{2\lambda}\cosh\left(\frac{\theta}{4}\right). \tag{3–4}$$

注意到 Bratu 方程 (3–1) 中包含超越非线性项 $\mathrm{e}^{u(x)}$. 对于超越非线性项的处理，同伦分析方法给出了一般性的递归公式以导出高阶形变方程 (high-order deformation equation) [41, 42]，这体现了同伦分析方法的普遍适用性. 但这里要指出的是，通过递归的方法获得高阶形变方程并不是一个高效的做法. 为了避免采用递归，引入以下变换：

$$V(x) = \exp\left[-\frac{1}{2}u(x)\right]. \tag{3–5}$$

通过这个变换，原方程 (3–1) 可改写为：

$$V(x)\frac{\mathrm{d}^2V(x)}{\mathrm{d}x^2} - \left(\frac{\mathrm{d}V(x)}{\mathrm{d}x}\right)^2 - \frac{\lambda}{2} = 0, \qquad x \in (0,1), \tag{3–6}$$

相应的边界条件为：

$$V(0) = V(1) = 1. \tag{3–7}$$

由于引入的变换是一个一一映射 (one-to-one mapping)，故新方程 (3–6) 和原方程 (3–1) 是完全等价的，若能求得新问题的解，则原问题的解可通过以下逆变换直接得到：

$$u(x) = -2\ln V(x). \tag{3–8}$$

3.1.2　基本同伦的构造

由方程 (3–6)，定义如下的非线性算子 (nonlinear operator)：

$$\mathscr{N}[\phi(x;q)] = \phi(x;q)\frac{\partial^2\phi(x;q)}{\partial x^2} - \left(\frac{\partial\phi(x;q)}{\partial x}\right)^2 - \frac{\lambda}{2}, \tag{3–9}$$

并设 $V_0(x)$ 为一个初始猜测解 (initial guess)，$\mathscr{L}$ 为辅助线性算子 (auxiliary linear operator)，c_0 为控制收敛参数 (convergence-control parameter)，则通过同伦参数 $q \in [0,1]$ 可建立如下的零阶形变方程 (zeroth-order deformation equation)：

$$(1-q)\mathscr{L}[\phi(x;q) - V_0(x)] = c_0 q \mathscr{N}[\phi(x;q)], \quad q \in [0,1], \tag{3–10}$$

相应的边界条件为

$$\phi(0;q) = \phi(1;q) = 1. \tag{3–11}$$

显然，从零阶形变方程 (3–10) 容易看出：当 $q=0$ 时，$\phi(x;0) = V_0(x)$；当 $q=1$ 时，$\phi(x;1) = V(x)$. 因此，$\phi(x;q)$ 给出了一个从初始猜测解 $V_0(x)$ 到精确解 $V(x)$ 的同伦. 根据 Taylor 定理，可将 $\phi(x;q)$ 展开为同伦参数 q 的 Maclaurin 级数

$$\phi(x;q) = V_0(x) + \sum_{k=1}^{+\infty} V_k(x) q^k, \tag{3–12}$$

其中，

$$V_k(x) = \mathscr{D}_k[\phi(x;q)] = \frac{1}{k!} \frac{\partial^k \phi(x;q)}{\partial q^k}\bigg|_{q=0}. \tag{3–13}$$

在同伦分析方法的框架内，$\mathscr{D}_k$ 被称为 k 阶同伦求导算子 (kth-order homotopy-derivative operator) [42]. 适当选取辅助线性算子 $\mathscr{L}$ 和控制收敛参数 c_0，使 Maclaurin 级数 (3–12) 在 $q=1$ 处一致收敛，则可得 $V(x)$ 的精确解：

$$V(x) = V_0(x) + \sum_{k=1}^{+\infty} V_k(x). \tag{3–14}$$

相应的 m 阶近似为：

$$V(x) \approx \tilde{V}_m(x) = V_0(x) + \sum_{k=1}^{m} V_k(x). \tag{3–15}$$

为了求解 $V_m(x)$，将 m 阶同伦求导算子 $\mathscr{D}_m$ 作用在零阶形变方程 (3–10) 及边界条件 (3–11) 两端，得到 m 阶形变方程 (mth-order deformation equation)

$$\mathscr{L}[V_m(x) - \chi_m V_{m-1}(x)] = c_0 \, R_m(x) \tag{3–16}$$

及边界条件

$$V_m(0) = V_m(1) = 0, \tag{3–17}$$

其中,

$$\chi_m = \begin{cases} 0, & m \leq 1, \\ 1, & m > 1, \end{cases} \tag{3–18}$$

$$\begin{aligned} R_m(x) &= \mathscr{D}_{m-1}\{\mathscr{N}[\phi(x;q)]\} \\ &= \sum_{s=0}^{m-1}\left[V_s(x)\frac{\mathrm{d}^2 V_{m-1-s}(x)}{\mathrm{d}x^2} - \frac{\mathrm{d}V_s(x)}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}V_{m-1-s}(x)}{\mathrm{d}x}\right] - \frac{\lambda}{2}(1-\chi_m). \end{aligned} \tag{3–19}$$

这样，边值问题 (3–6) 和 (3–7) 被转化成了一系列的线性子问题 (3–16) 和 (3–17).

与摄动法 [14, 15] 不同的是，同伦分析方法不依赖于任何小 (大) 物理参数，并提供了选取初始猜测解及辅助线性算子的自由. 在传统的同伦分析方法当中，选取初始猜测解和辅助线性算子主要是根据廖世俊 [38, 41] 提出的解表达原则、解存在原则和系数遍历原则 (见 1.2.1 节). 而小波同伦分析方法进一步放宽了这种自由，在选取初始猜测解和辅助线性算子上更加容易. 针对小波同伦分析方法中初始猜测解和辅助线性算子的选取，本论文中提出了相应的原则.

初始猜测解的选取遵循**边界适应原则 (rule of boundary-adaption)**，即：初始猜测解的选取要适应原问题的边界条件. 一般情况下，“适应”的含义即为满足原来的边界条件. 这将在下文中结合实例作进一步解释.

辅助线性算子的选取主要遵循以下原则：

(1) **解存在原则 (rule of solution existence)**：所选择的辅助线性算子，应当保证高阶形变方程对应的边值问题的解存在.

(2) **阶数匹配原则 (rule of order-match)**：在辅助线性算子的选择中，优先考虑与原方程阶数相同的算子.

根据上述原则，选择最简单的初始猜测解：

$$V_0(x) = 1, \tag{3–20}$$

它满足边界条件 (3–7).

选择辅助线性算子为如下形式：

$$\mathscr{L}[\phi(x;q)] = \frac{\partial^2\phi(x;q)}{\partial x^2} + \kappa_1\frac{\partial\phi(x;q)}{\partial x} + \kappa_0\phi(x;q), \tag{3–21}$$

其中，κ_0 和 κ_1 为可选参数. 根据常微分方程理论：二阶常系数线性微分方程的两点边值问题的解存在唯一. 显然，这样的选取满足解存在原则和阶数匹配原则.

另外，与传统同伦分析方法不同的是，不论选取什么样的算子，解表达形式都是在多分辨分析框架下，由小波基给出，故完全不需要根据辅助线性算子的不同而改变解表达形式. 另外，在传统同伦分析方法中，(3–21) 形式的辅助线性算子不是普遍适用的，κ_0 和 κ_1 两个参数需要根据解表达的形式严格确定. 关于小波同伦分析方法的这些优势，将在下文中结合计算结果进行详细的分析.

3.1.3　小波同伦基本方程

利用第二章介绍的多分辨分析与小波逼近 (2–25) 对 m 阶形变方程中的 $V_m(x)$ 及 $R_m(x)$ 进行展开，得:

$$V_m(x) \approx P^j V_m(x) = \sum_{k=0}^{2^j} V_m\left(\frac{k}{2^j}\right)\varphi_{j,k}(x) = \sum_{k=1}^{2^j-1} V_m\left(\frac{k}{2^j}\right)\varphi_{j,k}(x), \tag{3–22}$$

$$R_m(x) \approx P^j R_m(x) = \sum_{k=0}^{2^j} R_m\left(\frac{k}{2^j}\right)\varphi_{j,k}(x), \tag{3–23}$$

其中，

$$\begin{aligned} R_m\left(\frac{k}{2^j}\right) &= \sum_{s=0}^{m-1}\left[V_s\left(\frac{k}{2^j}\right)V''_{m-1-s}\left(\frac{k}{2^j}\right) - V'_s\left(\frac{k}{2^j}\right)V'_{m-1-s}\left(\frac{k}{2^j}\right)\right] \\ &- \frac{\lambda}{2}(1-\chi_m), \end{aligned} \tag{3–24}$$

其导数可根据第二章中的 (2–26) 式进行逼近，如下:

$$\frac{\mathrm{d}^n V_m(x)}{\mathrm{d}x^n} \approx \frac{\mathrm{d}^n P^j V_m(x)}{\mathrm{d}x^n} = \sum_{k=1}^{2^j-1} V_m\left(\frac{k}{2^j}\right)\frac{\mathrm{d}^n \varphi_{j,k}(x)}{\mathrm{d}x^n}, \quad m \geq 1,\ n = 1, 2. \tag{3–25}$$

此外，

$$\frac{\mathrm{d}^n V_0(x)}{\mathrm{d}x^n} = 0, \quad n = 1, 2. \tag{3–26}$$

这里，需要注意的是：边界条件 (3–17) 已经嵌入到 (3–22) 中，故无须对边界条件再进行其他处理了.

将 (3–22) 和 (3–23) 式代入高阶形变方程 (3–16) 中，可得 m 小波形式的高阶形变方程：

$$\sum_{k=1}^{2^j-1}\left[V_m\left(\frac{k}{2^j}\right)-\chi_m V_{m-1}\left(\frac{k}{2^j}\right)\right]\mathscr{L}\left[\varphi_{j,k}(x)\right]=c_0\sum_{k=0}^{2^j}R_m\left(\frac{k}{2^j}\right)\varphi_{j,k}(x). \tag{3–27}$$

为了求解上面的方程，采用伽辽金方法，在 (3–27) 两边分别同时乘以 $\varphi_{j,l}$ $(l=1,2,\cdots,2^j-1)$ 并在 $[0,1]$ 区间上进行积分，得 m 阶小波伽辽金形变方程：

$$\mathbf{A}^T\left(\hat{\mathbf{V}}_m-\chi_m\hat{\mathbf{V}}_{m-1}\right)=c_0\,\mathbf{B}^T\,\hat{\mathbf{R}}_m, \tag{3–28}$$

其中 $(\cdot)^T$ 为转置算子，

$$\hat{\mathbf{V}}_k=\left\{V_k\left(\frac{1}{2^j}\right),V_k\left(\frac{2}{2^j}\right),\cdots,V_k\left(\frac{2^j-1}{2^j}\right)\right\}^T \tag{3–29}$$

为 (2^j-1) 维列向量，

$$\hat{\mathbf{R}}_m=\left\{R_m\left(\frac{0}{2^j}\right),R_m\left(\frac{1}{2^j}\right),R_m\left(\frac{2}{2^j}\right),\cdots,R_m\left(\frac{2^j}{2^j}\right)\right\}^T \tag{3–30}$$

为 (2^j+1) 维列向量，

$$\mathbf{A}=\left\{a_{k,l}=\int_0^1\mathscr{L}\left[\varphi_{j,k}(x)\right]\varphi_{j,l}(x)\mathrm{d}x\right\}_{k,l=1}^{k,l=2^j-1} \tag{3–31}$$

和

$$\mathbf{B}=\left\{b_{k,l}=\int_0^1\varphi_{j,k}(x)\varphi_{j,l}(x)\mathrm{d}x\right\}_{k=0,\ \ l=1}^{k=2^j,\ l=2^j-1} \tag{3–32}$$

分别为 $(2^j-1)\times(2^j-1)$ 和 $(2^j+1)\times(2^j-1)$ 矩阵.

根据第二章给出的连接系数之定义 (2–32)，得：

$$\begin{cases}a_{k,l}=\Gamma_{k,l}^{j,2}+\kappa_1\Gamma_{k,l}^{j,1}+\kappa_0\Gamma_{k,l}^{j,0},\\ b_{k,l}=\Gamma_{k,l}^{j,0},\end{cases} \tag{3–33}$$

注意到矩阵 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 不随阶数 m 的变化而变化，也就是说，在计算过程中，系数矩阵不用更新. 因此，小波同伦分析方法可以很高效地求解 m 阶小波伽辽金形变方程 (3–28).

3.2　结果分析

以精确解 (3–3) 为基准，分别定义均方误差 $ErrSQ_m$ 与误差分布函数 $E_m(x)$ 为:

$$ErrSQ_m = \frac{1}{2^j+1}\sum_{k=0}^{2^j}\left[\tilde{u}_m\left(\frac{k}{2^j}\right) - u_e\left(\frac{k}{2^j}\right)\right]^2, \tag{3–34}$$

$$E_m(x) = \left|\tilde{u}_m(x) - u_e(x)\right|^2, \quad 0 < x < 1, \tag{3–35}$$

其中 $\tilde{u}_m(x) = -2ln\tilde{V}_m(x)$ 为 m 阶小波同伦解，$u_e(x)$ 为精确解.

3.2.1　收敛性分析

不失一般性，考虑Frank-Kamenetskii参数 $\lambda = 1$，辅助线性算子 $\mathscr{L}[\phi(x;q)] = \frac{\partial^2\phi(x;q)}{\partial x^2}$，分辨率水平 j 从 3 到 6 的情形. 与传统同伦分析方法一样，在小波同伦分析方法的框架内，可以很方便地通过选取合适的控制收敛参数 c_0 来获得收敛的级数解. 为了对比，下面的计算中均取 $c_0 = -0.5$.

图 3–1 给出了不同分辨率水平下，均方误差 $ErrSQ_m$ 随阶数 m 的变化情况. 从图中可以看出，在每一个分辨率水平下，随着阶数的增加，均方误差 $ErrSQ_m$ 快速地下降到一个与分辨率水平 j 相关的常数 $ErrSQ^*$: j 越大，$ErrSQ^*$ 越小. 因此，若分辨率水平足够大，阶数足够高，则通过小波同伦分析方法可以得到足够精确的解. 这说明了小波同伦分析方法在非线性微分方程求解中的有效性.

通过进一步的计算与分析可发现：当辅助线性算子为 $\mathscr{L}[\phi(x;q)] = \frac{\partial^2\phi(x;q)}{\partial x^2}$ 时，只要控制收敛参数 c_0 落在以下区间

$$\mathbf{R}_c = \{c_0 | -0.5 \le c_0 < 0\}, \tag{3–36}$$

则在不同分辨率水平下，对不同的物理参数 λ ($0 < \lambda \le \lambda_c$) ，小波同伦解都能很好地收敛到原方程的精确解. 图 3–2 给出了分辨率水平 $j = 4$ 时，40 阶小波同伦解与精确解的对比，可见二者吻合得非常好. 这说明小波同伦分析方法具有较好的收敛性. 同时，由于控制收敛参数 c_0 在很大范围内都能保证解的收敛，故在小波同伦分析方法框架下，选择一个合适的 c_0 并不困难.

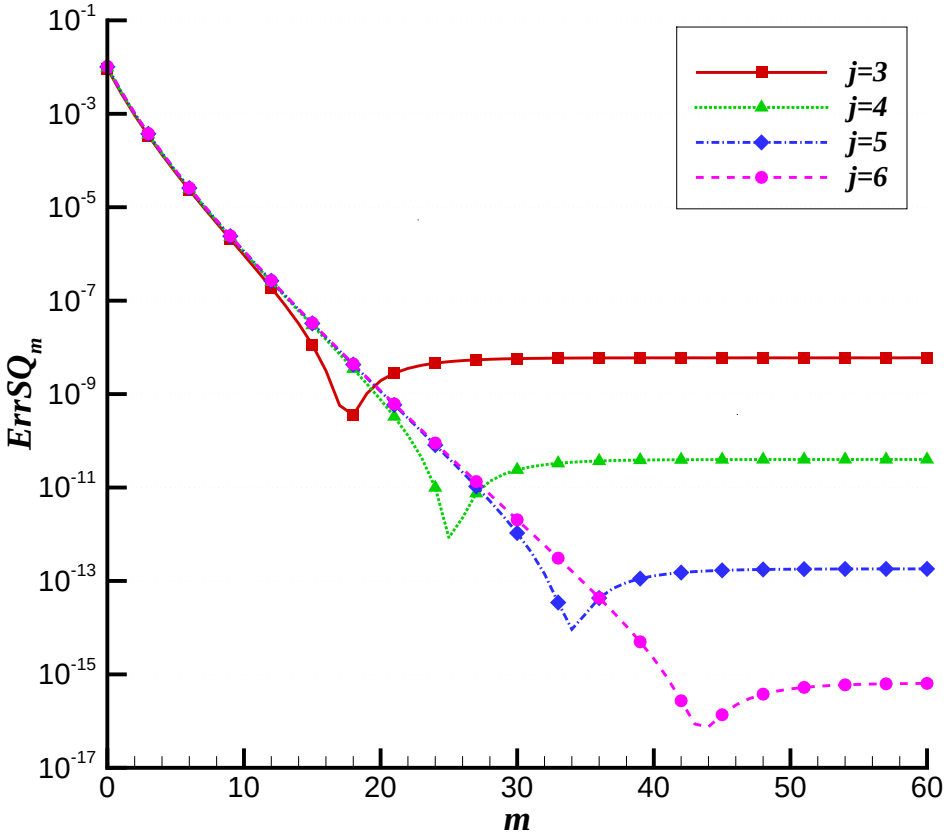

图 3–1 Frank-Kamenetskii 参数 $\lambda = 1$，控制收敛参数 $c_0 = -1/2$，辅助线性算子 $\mathscr{L}[\phi(x;q)] = \frac{\partial^2 \phi(x;q)}{\partial x^2}$ 时，不同分辨率水平下小波同伦逼近的均方误差随阶数 m 的变化.

Fig. 3–1 The averaged square error of the wHAM approximations (given by different resolution level j) versus the approximation order m in case of the Frank–Kamenetskii parameter $\lambda = 1$, the convergence-control parameter $c_0 = -1/2$ and the auxiliary linear operator $\mathscr{L}[\phi(x;q)] = \frac{\partial^2 \phi(x;q)}{\partial x^2}$. Solid line with square symbols: $j = 3$; dotted line with delta symbols: $j = 4$; dash-dotted line with diamond symbols: $j = 5$; dashed line and with circle symbols: $j = 6$.

3.2.2 精度与效率的平衡

第二章中已经指出：在多分辨分析中，对于一个 $L^2[0,1]$ 空间里的函数，均可通过提高分辨率水平来提高小波逼近的精度. 因此，正如图 3–1

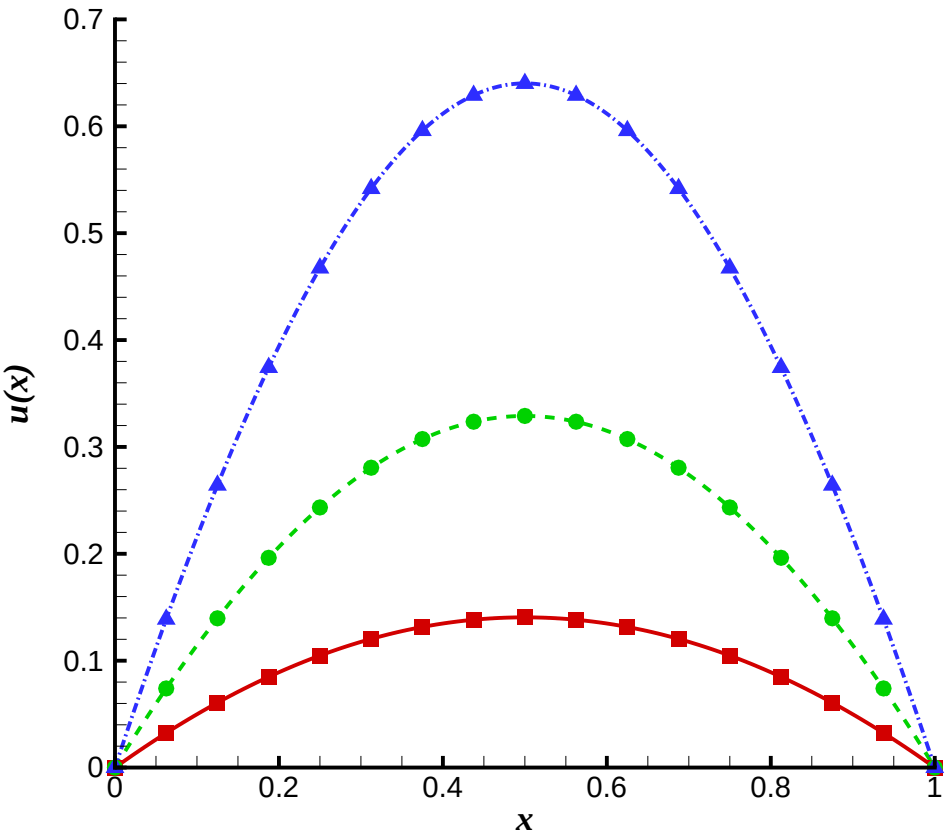

图 3–2 分辨率水平 $j=4$，控制收敛参数 $c_0=-1/2$，辅助线性算子 $\mathscr{L}[\phi(x;q)]=\frac{\partial^2\phi(x;q)}{\partial x^2}$ 时，不同 λ 下 40 阶小波同伦解与精确解的对比.

Fig. 3–2 Comparison between the 40th-order wHAM approximations and the exact solutions in case of the resolution level $j=4$, the convergence-control parameter $c_0=-1/2$ and the auxiliary linear operator $\mathscr{L}[\phi(x;q)]=\frac{\partial^2\phi(x;q)}{\partial x^2}$. Solid line: exact solution when $\lambda=1$; dashed line: exact solution when $\lambda=2$; dash-dotted line: exact solution when $\lambda=3$; square: wHAM approximation when $\lambda=1$; circle: wHAM approximation when $\lambda=2$; delta: wHAM approximation when $\lambda=3$.

所示的结果一样，在小波同伦分析方法的框架内，可以通过调节分辨率水平 j 来控制解的精度. 当然，较高的分辨率水平也意味着更多的 CPU 时间消耗. 为了对比 CPU 耗时，本论文中的所有结果均在同一台计算机上求得，其基本配置情况为：DELL Inspiron 3847, Intel(R) Core(TM) i5-4460 CPU@

3.20GHz. Frank-Kamenetskii 参数 $\lambda = 1$，控制收敛参数 $c_0 = -1/2$，辅助线性算子 $\mathscr{L}[\phi(x;q)] = \frac{\partial^2 \phi(x;q)}{\partial x^2}$ 时，不同分辨率水平下 60 阶小波同伦逼近所对应的均方误差及 CPU 耗时如表 3–1所示.

表 3–1 Frank-Kamenetskii 参数 $\lambda = 1$，控制收敛参数 $c_0 = -1/2$，辅助线性算子 $\mathscr{L}[\phi(x;q)] = \frac{\partial^2 \phi(x;q)}{\partial x^2}$ 时，不同分辨率水平下 60 阶小波同伦解的均方误差及所对应的 CPU 耗时.

Table 3–1 The averaged square error and the CPU time for the 60th-order wHAM approximation versus the resolution level j in case of $\lambda = 1$, the convergence-control parameter $c_0 = -1/2$ and the auxiliary linear operator $\mathscr{L}[\phi(x;q)] = \frac{\partial^2 \phi(x;q)}{\partial x^2}$.

j, resolution level	$ErrSQ_{60}$	CPU time (sec.)
2	2.84×10^{-08}	0.15
3	5.98×10^{-09}	0.29
4	3.98×10^{-11}	0.36
5	1.81×10^{-13}	0.51
6	6.51×10^{-16}	0.92

表 3–1 的结果显示：随着分辨率水平的提高，解的精度也随之提高，而 CPU 耗时则增加. 而另一方面，对于不同的分辨率水平 j，均可在 1 秒的 CPU 耗时以内获得足够精确的解，这表明小波同伦分析方法具有较高的计算效率. 在实际应用中 (尤其是对于大规模复杂问题)，通常会遇到效率与精度的平衡问题，即：如何在条件允许的时间内获得一个足够精确的解. 在小波同伦分析方法的框架内，分辨率水平正好提供了一种平衡精度与效率的方法. 换句话说，通过调节分辨率水平可以很方便地平衡效率与精度之间的关系.

为了进一步说明小波同伦分析方法的优势，现将小波同伦分析方法与传统的同伦分析方法进行了对比，如表 3–2 所示. 从表中可以很明显地看到，小波同伦分析方法收敛速度比传统同伦分析方法要快，而且 CPU 耗时随着阶数的增长是线性的，除了大约 0.9 秒的预处理时间消耗以外，随着阶数的增长，CPU 耗时的增加甚至几乎是可以忽略的. 例如，获得 50 阶小波同伦解需要的 CPU 耗时仅仅比 10 阶逼近多出大约 0.015 秒，这意味着：利用小波同伦分析方法，求得高阶逼近是很容易的. 与之相对的是，传统的同伦分析方法虽然预

表 3–2 Frank-Kamenetskii 参数 $\lambda = 1$，控制收敛参数 $c_0 = -1/2$，辅助线性算子 $\mathscr{L}[\phi(x;q)] = \frac{\partial^2\phi(x;q)}{\partial x^2}$ 时，不同阶数小波同伦分析解 (wHAM) 与传统同伦解 (HAM) 的均方误差与 CPU 耗时对比.

Table 3–2 Comparison of the averaged square error and the CPU time at the different order of approximation m given by the wHAM and the normal HAM in case of $\lambda = 1$, the convergence-control parameter $c_0 = -1/2$ and the auxiliary linear operator $\mathscr{L}[\phi(x;q)] = \frac{\partial^2\phi(x;q)}{\partial x^2}$.

m	$ErrSQ_m$		CPU time (sec.)	
	wHAM	HAM	wHAM	HAM
5	6.08×10^{-05}	1.20×10^{-04}	0.9021	0.0350
10	1.16×10^{-06}	5.57×10^{-06}	0.9047	0.0806
20	1.18×10^{-09}	2.81×10^{-08}	0.9089	0.2662
30	2.04×10^{-12}	2.34×10^{-10}	0.9114	0.6990
40	2.16×10^{-15}	2.49×10^{-12}	0.9143	1.6146
50	4.89×10^{-16}	3.07×10^{-14}	0.9171	3.5780

处理时间几乎可以忽略，但随着阶数的增加，CPU 耗时呈指数增长，这对高阶逼近的计算是非常不利的. 这进一步说明了小波同伦分析方法在非线性问题求解上具有很高的计算效率.

小波逼近的另一个问题是边界跳跃现象 [112, 115, 126]，即：对于有限区间上的逼近，在边界附近误差会急剧增加. 然而，对于一个可靠的解不仅应该在总体上精度较高，且误差分布也应当比较均匀. 为了解决这个问题，本论文采用了王记增 [112] 提出的边界延拓方法，很好地避免了边界跳跃现象，如图 3–3 所示. 图中显示：在不同分辨率水平下，小波同伦分析方法得到的解的误差分布都比较均匀. 这进一步证明了小波同伦分析方法的有效性和可靠性.

简而言之，由于小波同伦分析方法是基于多分辨分析的，故通过调节分辨率水平 j 可以很方便地平衡计算效率与精度的问题. 而由于广义 Coiflet 小波上具有正交性、紧支性、准插值性及较高精度等优势，小波同伦分析方法也变得十分高效. 小波同伦分析方法与传统同伦分析方法的对比表明：小波同伦分析方法在精度和效率上相对于传统的同伦分析方法均有一定的优势.

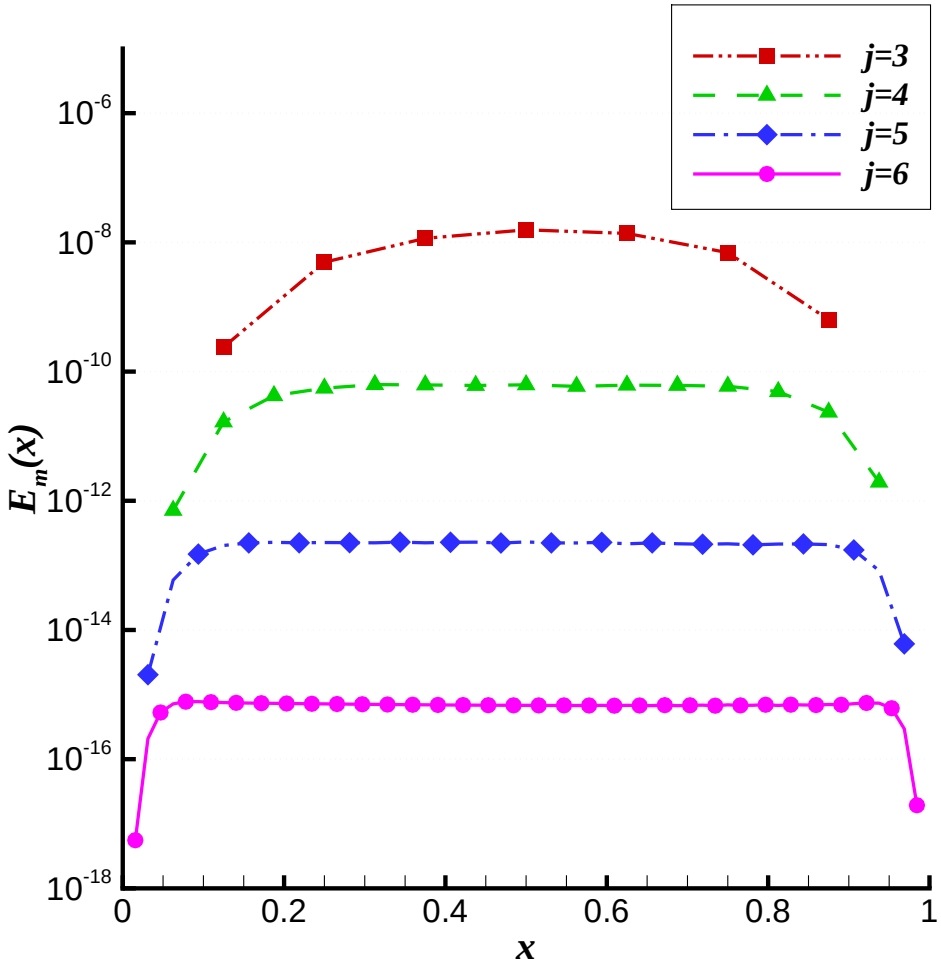

图 3–3 Frank-Kamenetskii 参数 $\lambda = 1$，控制收敛参数 $c_0 = -1/2$，辅助线性算子 $\mathscr{L}[\phi(x;q)] = \frac{\partial^2 \phi(x;q)}{\partial x^2}$ 时，不同分辨率水平下小波同伦解的误差分布.

Fig. 3–3 The error distributions given by means of the wHAM for different resolution levels in case of $\lambda = 1$, $c_0 = -1/2$ and the auxiliary linear operator $\mathscr{L}[\phi(x;q)] = \frac{\partial^2 \phi(x;q)}{\partial x^2}$. Dash-dot-dotted line: $j = 3$; dashed line: $j = 4$; dash-dotted line: $j = 5$; solid line: $j = 6$.

3.2.3 对辅助线性算子的适应性分析

总的来说，同伦分析方法具有自由选择辅助线性算子的优势，但在传统同伦分析方法的框架内，基函数与解表达的选择是强依赖于辅助线性算子的. 以

本论文中所采用的一般化二阶线性算子 (3–21) 为例，在传统的同伦分析方法中，当 $\kappa_1 = \kappa_0 = 0$ 时，对应的只能以幂函数作为基函数；当 $\kappa_1 = 0$ 且 $\kappa_0 > 0$ 时，对应的只能以三角函数作为基函数；当 $\kappa_1 = 0$ 且 $\kappa_0 < 0$ 时，对应的要以指数函数作为基函数；而 $\kappa_1 \neq 0$ 时，基函数的选取变得十分不便.

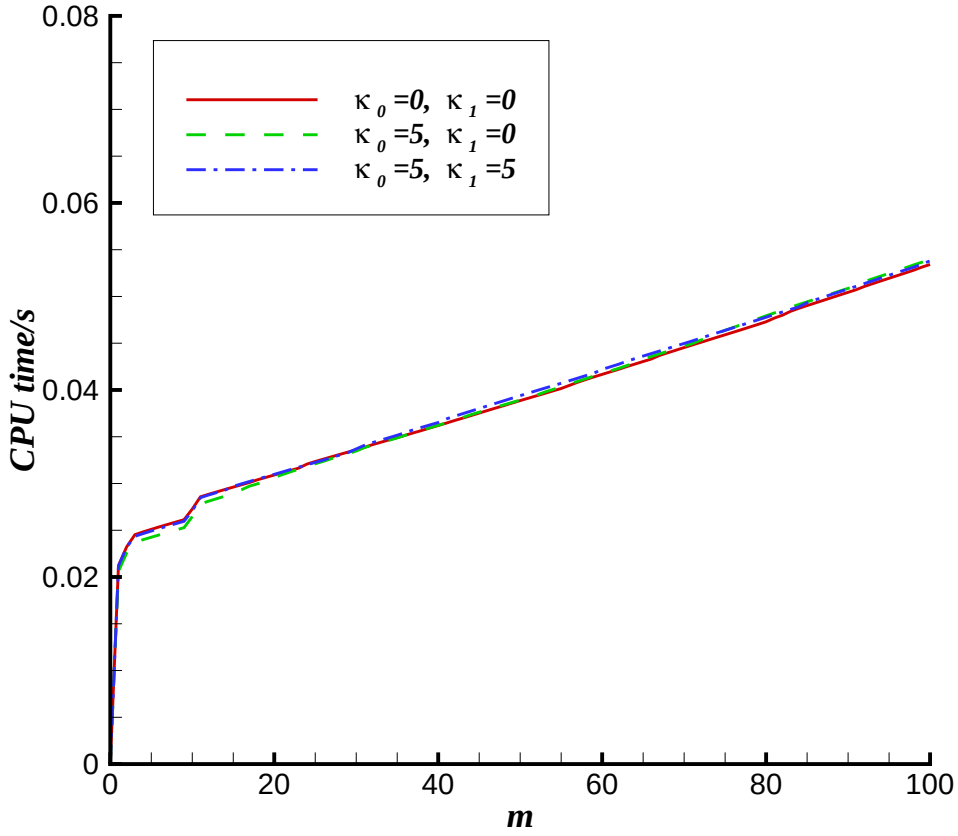

图 3–4 Frank-Kamenetskii 参数 $\lambda = 1$，分辨率水平 $j = 6$，对于不同的辅助线性算子，采用小波同伦分析方法求解的 CPU 耗时 (不包含预处理) 随着阶数 m 的变化.

Fig. 3–4 The CPU time (pre-calculation not included) versus the approximation order m by means of the wHAM in case of the Frank-Kamenetskii parameter $\lambda = 1$, the resolution level $j = 6$ and the different types of auxiliary linear operators. Solid line: $\kappa_0 = 0, \kappa_1 = 0$; dashed line: $\kappa_0 = 5, \kappa_1 = 0$; dash-dotted line: $\kappa_0 = 5, \kappa_1 = 5$.

而由于小波本身不依赖于辅助线性算子的具体形式，故小波同伦分析方

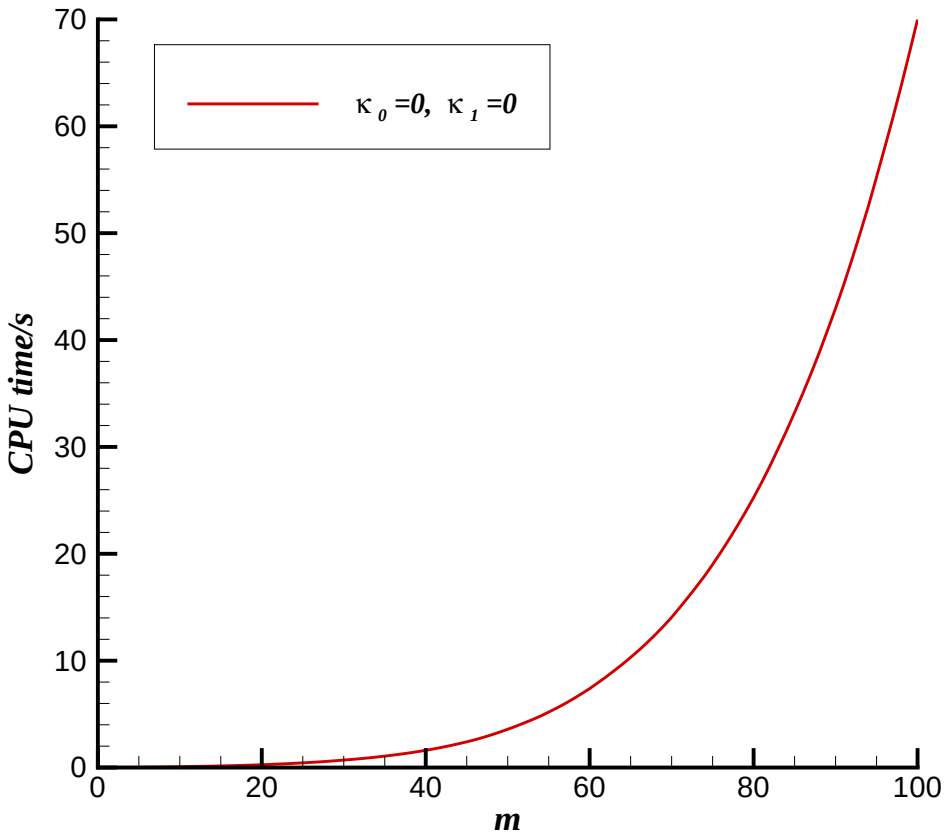

图 3–5 Frank-Kamenetskii 参数 $\lambda = 1$，辅助线性算子参数 $\kappa_0 = 0, \kappa_1 = 0$ 时，采用传统同伦分析方法求解的 CPU 耗时随着阶数 m 的变化.

Fig. 3–5 The CPU time versus approximation order m by means of the normal HAM in case of $\lambda = 1$, the resolution level $j = 6$ and the auxiliary linear operator defined by $\kappa_0 = 0, \kappa_1 = 0$.

法完全解除了这种限制，不管选择什么样的线性算子，均可用小波基函数展开，这首先从理论上保证了小波同伦分析方法对辅助线性算子的强适应性. 不失一般性，本论文中分别考虑三种不同的辅助线性算子：$\mathscr{L}[\phi(x;q)] = \frac{\partial^2 \phi(x;q)}{\partial x^2}$，$\mathscr{L}[\phi(x;q)] = \frac{\partial^2 \phi(x;q)}{\partial x^2} + 5\phi(x;q)$ 和 $\mathscr{L}[\phi(x;q)] = \frac{\partial^2 \phi(x;q)}{\partial x^2} + 5\frac{\partial \phi(x;q)}{\partial x} + 5\phi(x;q)$. 若仅从运算效率上来讲，在传统同伦分析方法的框架内，选择后两种辅助线性算子的运算效率要远远低于第一种算子，但在小波同伦分析方法中，CPU 耗时随着阶数的增加却几乎不受辅助线性算子的影响，如图 3–4 所示. 更为重要的是，

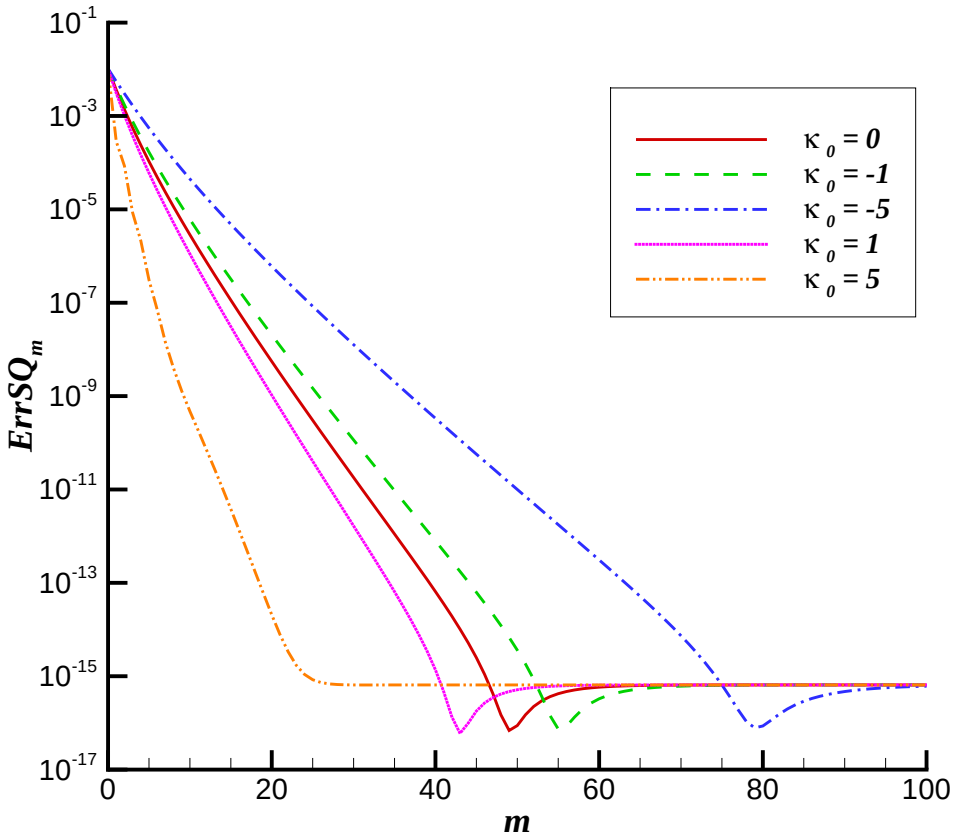

图 3–6 Frank-Kamenetskii 参数 $\lambda = 1$，分辨率水平 $j = 6$，控制收敛参数 $c_0 = -0.4$ 时，不同辅助线性算子 ($\kappa_1 = 0$ 且 κ_0 从 -5 到 5) 对应的均方误差随着阶数的变化.

Fig. 3–6 The averaged square errors versus the order of approximation m in case of the Frank-Kamenetskii parameter $\lambda = 1$, the resolution level $j = 6$ and the convergence-parameter $c_0 = -0.4$ for different auxiliary linear operators ($\kappa_1 = 0$ with κ_0 varying from -5 to 5). Solid line: $\kappa_0 = 0$; dashed line: $\kappa_0 = -1$; dash-dotted line: $\kappa_0 = -5$; dotted line: $\kappa_0 = 1$; dash-dot-dotted line: $\kappa_0 = 5$.

从图中可以清楚地看到，采用小波同伦分析方法进行求解时，CPU 耗时随着阶数的增加是线性的. 与之相对的是，若采用传统同伦分析方法，则 CPU 耗时将呈现明显的指数增长，如图 3–5 所示. 这种指数增长导致的后果是：如果需要计算更高阶逼近，则 CPU 耗时将会非常大. 例如，计算 100 阶逼近时，采用小

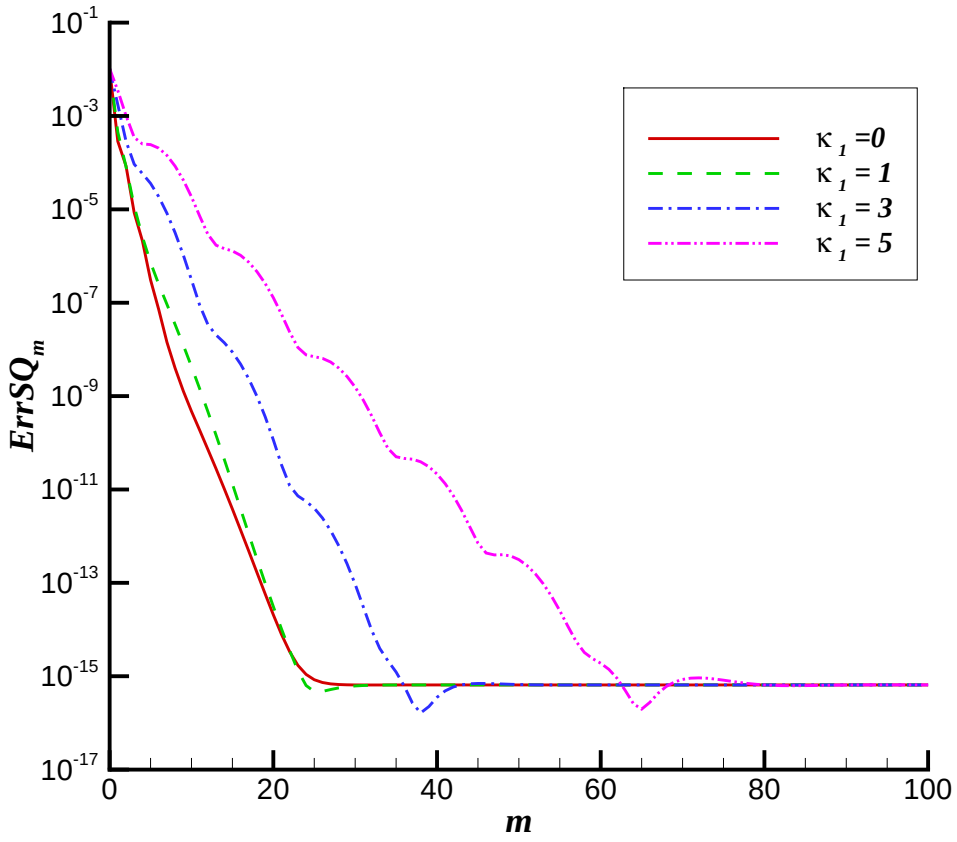

图 3–7 Frank-Kamenetskii 参数 $\lambda = 1$，分辨率水平 $j = 6$，控制收敛参数 $c_0 = -0.4$ 时，不同辅助线性算子 ($\kappa_0 = 5$ 且 κ_1 从 0 到 5) 对应的均方误差随着阶数的变化.

Fig. 3–7 The averaged square errors versus the order of approximation m in case of the Frank-Kamenetskii parameter $\lambda = 1$, the resolution level $j = 6$ and the convergence-control parameter $c_0 = -0.4$ for different auxiliary linear operators ($\kappa_0 = 5$ with κ_1 varying from 0 to 5). Solid line: $\kappa_1 = 0$; dashed line: $\kappa_1 = 1$; dash-dotted line: $\kappa_1 = 3$; dash-dot-dotted line: $\kappa_1 = 5$.

波同伦分析方法仅需要大约 1 秒的时间，而传统同伦分析方法则需要 70 秒. 另外，遗憾的是，在传统同伦分析方法中，采用后两种算子求解都没有获得收敛的级数解，这体现了小波同伦分析方法对辅助线性算子具有更强的适应性. 在实际应用中 (特别是对于一些强非线性问题)，往往需要计算高阶逼近来获得比较高的精度，故小波同伦分析方法中 CPU 耗时的线性增长性质和对辅助线性

算子的强适应性具有重要意义.

为了进一步说明小波同伦分析方法对不同辅助线性算子的有效性和强适应性，首先考虑 $\kappa_1 = 0$ ，κ_0 从 -5 到 5 这一系列的辅助线性算子. 不同辅助线性算子对应的均方误差随阶数 m 的变化情况如图 3–6 所示. 从图中可以看出：对于每个 κ_0，小波同伦解均快速收敛到精确解. 这说明小波同伦分析方法对不同的辅助线性算子均有很强的适应性，故在小波同伦分析方法框架下，选择一个合适的辅助线性算子是很容易的. 而另一方面，辅助线性算子的选取显然是影响收敛速度的：在本文考虑的范围内，κ_0 越大，收敛越快，如图 3–6，这表明小波同伦分析方法在选择高效的辅助线性算子方面相对于传统的同伦分析方法具有更大的潜力和优势.

进一步考虑 $\kappa_0 = 5$ ，κ_1 从 0 到 5 的情形，相应的均方误差随着阶数 m 的变化情况如图 3–7 所示. 由图可知：所有的辅助线性算子均能给出较快收敛的小波同伦解. 当然，收敛速度也是依赖于参数 κ_1 的，其中，$\kappa_0 = 5$ 且 $\kappa_1 = 1$ 确定的辅助线性算子对应的小波同伦解收敛最快.

3.2.4　小波同伦迭代技术

在传统的同伦分析方法中已证实：大部分情况下，采用同伦迭代技术可以显著加快解的收敛. 那么，在小波同伦分析方法的框架内，该项技术是否还依然有效呢？为了回答这个问题，本节以辅助线性算子为 $\mathscr{L}[\phi(x;q)] = \frac{\partial^2 \phi(x;q)}{\partial x^2}$ 的情况为例进行说明.

图 3–8 给出了采用迭代小波同伦与非迭代情况下，均方误差随 CPU 时间 (不包含预处理) 的变化曲线. 从图中可以看出：在小波同伦分析方法中，迭代技术同样可以加速收敛. 另外，3 阶与 4 阶迭代要比 1 阶和 2 阶迭代要快一些. 因此，小波同伦迭代技术在非线性问题的求解中是一种值得推荐的方法.

3.3　本章小结

本章主要以一维 Bratu 方程为示范模型，介绍了求解非线性常微分方程边值问题的小波同伦分析方法的基本思想与算法步骤，并提出小波同伦分析方法中初始猜测解和辅助线性算子选取的基本原则. 通过计算结果的对比和讨论，分析了小波同伦分析方法的主要优势.

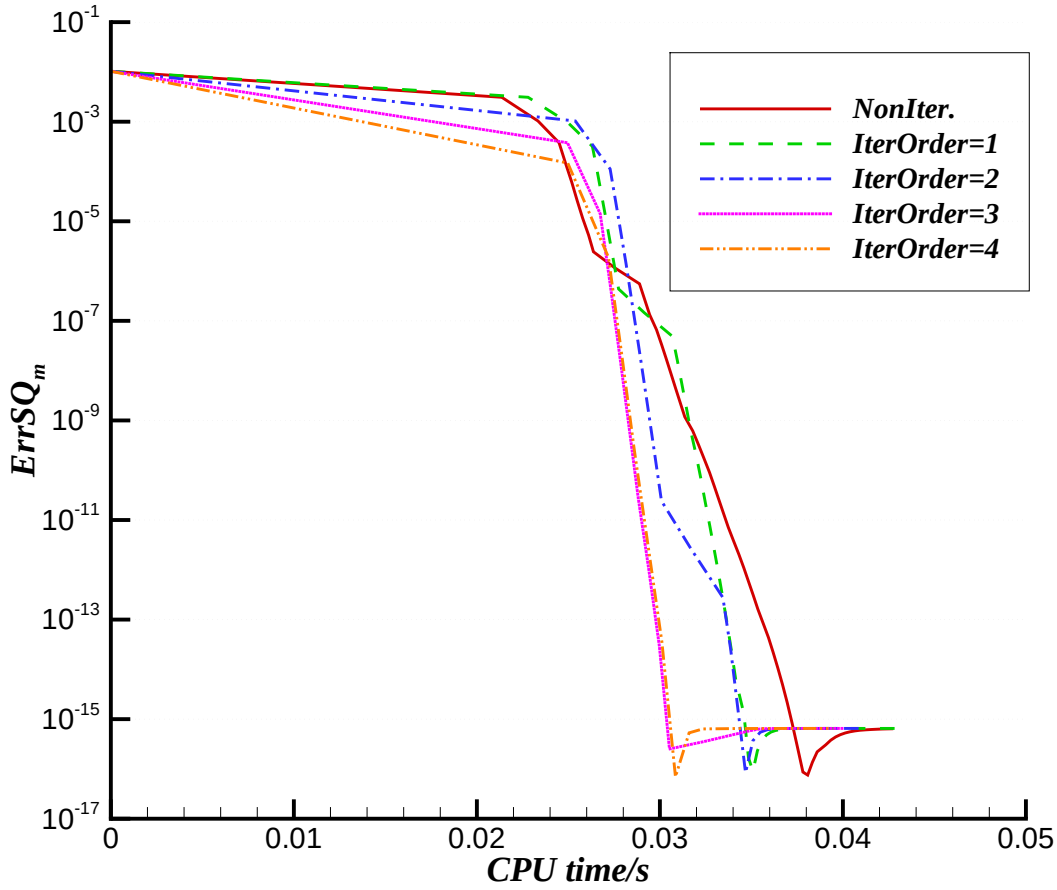

图 3–8 Frank-Kamenetskii 参数 $\lambda = 1$，分辨率水平 $j = 6$，辅助线性算子为 $\mathscr{L}[\phi(x;q)] = \frac{\partial^2 \phi(x;q)}{\partial x^2}$ 时，迭代与非迭代小波同伦解的均方误差随 CPU 耗时的变化.

Fig. 3–8 Comparison of the averaged square error curves of iterative and non-iterative wHAM in case of the Frank-Kamenetskii parameter $\lambda = 1$, the resolution level $j = 6$ and the auxiliary linear operator $\mathscr{L}[\phi(x;q)] = \frac{\partial^2 \phi(x;q)}{\partial x^2}$. Solid line: non-iterative results; dashed line: $IterOrder = 1$; dash-dotted line: $IterOrder = 2$; dotted line: $IterOrder = 3$ dash-dot-dotted line: $IterOrder = 4$.

小波同伦分析方法不仅继承了传统同伦分析方法最重要的优势，同时也表现出许多新的亮点，它们主要是:

(1) 在传统同伦分析方法中起到重要作用的控制收敛参数，在小波同伦分析方法中同样具有控制收敛的作用，本章中，通过选取合适的控制收敛参

数，采用一系列的辅助线性算子均得到了快速收敛的小波同伦解；

(2) 由于小波同伦分析方法是建立在多分辨分析基础之上，故分辨率水平自然地提供了一种非常便捷的方式来平衡计算效率与精度之间的关系；

(3) 与传统的同伦分析方法相比，小波同伦分析方法对不同的辅助线性算子具有更强的适应性，主要体现为小波形式的解表达对不同辅助线性算子的普遍适应性、不同辅助线性算子下小波同伦解的快速收敛性以及不同辅助线性算子下运算的高效性三大方面，这一方面使辅助线性算子的选取变得更加简单，另一方面也使小波同伦分析方法在强非线性问题的求解上具备了更大的潜力；

(4) 与传统的同伦分析方法相比，小波同伦分析方法具有更高的求解效率，主要体现为能快速获得高精度的小波逼近和 CPU 耗时随着阶数的线性增长两个方面；

(5) 在传统同伦分析方法中能显著加速收敛的同伦迭代技术，在小波同伦分析方法中同样可以加速收敛.

第四章　利用小波同伦分析方法寻找多解

第三章以一维 Bratu 方程为范例介绍了小波同伦分析方法的基本思想与算法，但为了简单起见仅仅讨论了其中较为稳定的一支解. 而实际上，非线性边值问题之所以复杂，其中一个重要原因就是存在多解. 那么，对于多解问题而言，小波同伦分析方法是否能够求得其所有的解呢？本章中，将继续以一维 Bratu 方程作为多解问题的范例做进一步的探讨，同时借助该范例说明含参变量非线性边值问题在小波同伦分析方法中的求解策略.

4.1　基本思想

在一般的方法中，寻找多解通常是通过给出从不同的初始解来搜寻，而实际上由于给初始解的方法相对比较盲目，而且无法从理论上判断所要求解的非线性边值问题到底存在多少个解，因此就算能求得多解，也不能确定是否已找全. 本论文中，笔者通过引入一个可区分不同解支的参数，把原问题转化成一个含参变量的非线性边值问题. 借助一阶形变方程导出一个非线性代数方程，并通过非线性代数方程解的情况，从理论上对原非线性边值问题解的个数给出判断，并采用小波同伦分析方法进行求解.

4.1.1　基本变换

本章所讨论的问题依然是一维 Bratu 方程 [122–124]:

$$\frac{\mathrm{d}^2u(x)}{\mathrm{d}x^2}+\lambda \mathrm{e}^{u(x)}=0, \qquad x\in(0,1), \tag{4–1}$$

边界条件为:

$$u(0)=u(1)=0, \tag{4–2}$$

其中，λ 是一个大于 0 的参数，即 Frank-Kamenetskii 参数 [122]. 第三章已经给出，该问题存在多解的区间是 $0<\lambda<\lambda_c$，其中 $\lambda_c\approx 3.513830719$.

与第三章不同的是，为了搜索不同的解支，需要先选定一个可以区分不同解支的参数. 这里，选择的参数为 $A=u\left(\frac{1}{2}\right)$，并做变换 $u(x)=v(x)+A$，在该

变换下，原方程 (4–1) 变为：

$$\frac{\mathrm{d}^2 v(x)}{\mathrm{d}x^2} + \lambda \mathrm{e}^{A} \mathrm{e}^{v(x)} = 0, \qquad x \in (0,1), \tag{4–3}$$

相应的边界条件 (4–2) 变为：

$$v(0) = v(1) = -A, \tag{4–4}$$

并增加了限制条件：

$$v\left(\frac{1}{2}\right) = 0. \tag{4–5}$$

与第三章类似，进一步引入变换 $V(x) = \exp\left[-\frac{1}{2}v(x)\right]$，并令 $\Delta = \mathrm{e}^{\frac{A}{2}}$，则方程 (4–4) 进一步变为：

$$V(x)\frac{\mathrm{d}^2 V(x)}{\mathrm{d}x^2} - \left(\frac{\mathrm{d}V(x)}{\mathrm{d}x}\right)^2 - \frac{\lambda}{2}\Delta^2 = 0, \qquad x \in (0,1), \tag{4–6}$$

相应的边界条件和限制条件分别为：

$$V(0) = V(1) = \Delta \tag{4–7}$$

和

$$V\left(\frac{1}{2}\right) = 1. \tag{4–8}$$

注意到与上一章描述的问题不一样的是，该问题中函数 $V(x)$ 和参数 Δ 都是待求解的. 本论文中把类似方程 (4–6) 这样包含待求解参数的非线性微分方程称为**含参变量的非线性微分方程**，类似于 (4–7) 的边界条件称为**不定边界条件**，二者合在一起统称**含参变量的非线性边值问题**.

若能求得上述含参变量非线性边值问题的解，则原问题 (4–1) 和 (4–2) 的解可通过下面的逆变换得到：

$$u(x) = 2\ln\frac{\Delta}{V(x)}. \tag{4–9}$$

4.1.2　基本同伦的构造

首先，根据方程 (4–6)，定义如下的非线性算子：

$$\mathcal{N}[\phi(x;q), \Delta(q)] = \phi(x;q)\frac{\partial^2 \phi(x;q)}{\partial x^2} - \left(\frac{\partial \phi(x;q)}{\partial x}\right)^2 - \frac{\lambda}{2}\Delta^2(q), \tag{4–10}$$

并设 $V_0(x)$ 为一个初始猜测解，$\mathscr{L}$ 为辅助线性算子，c_0 为控制收敛参数，则通过同伦参数 $q \in [0,1]$ 可建立如下的零阶形变方程：

$$(1-q)\mathscr{L}\left[\phi(x;q)-V_0(x)\right]=c_0 q\mathscr{N}[\phi(x;q),\Delta(q)],\quad q\in[0,1]. \tag{4–11}$$

另一方面，由于该问题含有不定边界，故没法像第三章那样直接满足. 为了处理不定边界，进一步对边界条件及限制条件构造如下的同伦：

$$\begin{cases}(1-q)\left[\phi(0;q)-V_0(0)\right]=c_0 q\left[\phi(0;q)-\Delta(q)\right],\\ (1-q)\left[\phi\left(\dfrac{1}{2};q\right)-V_0\left(\dfrac{1}{2}\right)\right]=c_0 q\left[\phi\left(\dfrac{1}{2};q\right)-1\right],\\ (1-q)\left[\phi(1;q)-V_0(1)\right]=c_0 q\left[\phi(1;q)-\Delta(q)\right].\end{cases} \tag{4–12}$$

下文中，(4–11) 和 (4–12) 合称为零阶形变方程组. 显然，$q=0$ 时，$\phi(x;0)=V_0(x)$；$q=1$ 时，$\phi(x;1)=V(x)$；待定参数 Δ 的精确值为 $\Delta=\Delta(1)$.

类似第三章的做法，将 $\phi(x;q)$ 和 $\Delta(q)$ 均展开为同伦参数 q 的 Maclaurin 级数

$$\begin{cases}\phi(x;q)=V_0(x)+\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}V_k(x)q^k,\\ \Delta(q)=\delta_0+\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\delta_k(x)q^k,\end{cases} \tag{4–13}$$

则可类似地导出 m 阶形变方程组

$$\mathscr{L}\left[V_m(x)-\chi_m V_{m-1}(x)\right]=c_0\,R_m(x) \tag{4–14}$$

及边界条件方程组

$$\begin{cases}V_m(0)+c_0\,\delta_{m-1}=(c_0+\chi_m)\,V_{m-1}(0),\\ V_m\left(\dfrac{1}{2}\right)=(c_0+\chi_m)\,V_{m-1}\left(\dfrac{1}{2}\right)+c_0\,(\chi_m-1),\\ V_m(1)+c_0\,\delta_{m-1}=(c_0+\chi_m)\,V_{m-1}(1),\end{cases} \tag{4–15}$$

其中，χ_m 由第三章的 (3–18) 式定义，右端项

$$\begin{aligned}R_m(x) &= \mathscr{D}_{m-1}\{\mathscr{N}[\phi(x;q),\Delta(q)]\}\\ &= \sum_{s=0}^{m-1}\left[V_s(x)\frac{\mathrm{d}^2V_{m-1-s}(x)}{\mathrm{d}x^2}-\frac{\mathrm{d}V_s(x)}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}V_{m-1-s}(x)}{\mathrm{d}x}-\frac{\lambda}{2}\delta_s\delta_{m-1-s}\right].\end{aligned} \tag{4–16}$$

这里，需要特别注意的是：在 m 阶形变方程组 (4–14) 和 (4–15) 中，δ_{m-1} 也是待求解参数，故求解时应当与 $V_m(x)$ 一同解出. 更有意思的是，1 阶形变方程关于参数 δ_0 是一个二次方程，而 1 阶以上则关于 δ_{m-1} 是一个线性方程，这从理论上决定了从这组高阶形变方程可以求出两组解. 这与实际情况是完全相符的.

关于初始猜测解 $V_0(x)$ 的选取，按照第三章的提法，应当满足**边界适应原则**. 对于本章的问题，边界条件 (4–8) 为不定边界条件，故不可能通过选取初始猜测解直接满足边界条件. 不过，对于不定边界和 $x=\frac{1}{2}$ 上的限制条件，已经构造了相关的同伦并导出了高阶形变方程，故理论上本章中初始猜测解可以任意选取. 但考虑到最终需要满足的边界条件 (4–8) 中 $V(0)=V(1)$，为了尽可能与之相匹配，在初始猜测解的选取时同样使 $V_0(0)=V_0(1)$，这正是**边界适应原则**更一般的含义. 为了简单起见，这里直接选取常值函数

$$V_0(x)=C, \tag{4–17}$$

作为初始猜测解，其中 C 可取任意给定.

关于辅助线性算子 $\mathscr{L}$ 的选取，按照**解存在原则**和**阶数匹配原则**，选取

$$\mathscr{L}[\phi(x;q)]=\frac{\partial^2\phi(x;q)}{\partial x^2}. \tag{4–18}$$

4.1.3　小波同伦基本方程

类似第三章的做法，先对 m 阶形变方程中的 $V_m(x)$ 及 $R_m(x)$ 进行小波展开，得：

$$V_m(x)\approx P^jV_m(x)=\sum_{k=0}^{2^j}V_m\left(\frac{k}{2^j}\right)\varphi_{j,k}(x), \tag{4–19}$$

$$R_m(x)\approx P^jR_m(x)=\sum_{k=0}^{2^j}R_m\left(\frac{k}{2^j}\right)\varphi_{j,k}(x), \tag{4–20}$$

其中，

$$\begin{aligned}R_m\left(\frac{k}{2^j}\right) &= \sum_{s=0}^{m-1}\left[V_s\left(\frac{k}{2^j}\right)V''_{m-1-s}\left(\frac{k}{2^j}\right)-V'_s\left(\frac{k}{2^j}\right)V'_{m-1-s}\left(\frac{k}{2^j}\right)\right]\\ &- \frac{\lambda}{2}\sum_{s=0}^{m-1}\delta_s\delta_{m-1-s},\end{aligned} \tag{4–21}$$

将 (4–19) 和 (4–20) 式代入高阶形变方程 (4–14) 中，可得 m 小波形式的高阶形变方程：

$$\sum_{k=0}^{2^j}\left[V_m\left(\frac{k}{2^j}\right)-\chi_m V_{m-1}\left(\frac{k}{2^j}\right)\right]\mathscr{L}\left[\varphi_{j,k}(x)\right]=c_0\sum_{k=0}^{2^j}R_m\left(\frac{k}{2^j}\right)\varphi_{j,k}(x). \tag{4–22}$$

采用伽辽金方法，在 (4–22) 两边分别同时乘以 $\varphi_{j,l}$ $(l=1,2,\cdots,2^j-1)$ 并在 $[0,1]$ 区间上进行积分，并联合边界条件 (4–15)，得 m 阶小波伽辽金形变方程组：

$$\begin{cases}\mathbf{A}^T\left(\hat{\mathbf{V}}_m-\chi_m\hat{\mathbf{V}}_{m-1}\right)=c_0\,\mathbf{B}^T\,\hat{\mathbf{R}}_m,\\ V_m(0)+c_0\,\delta_{m-1}=(c_0+\chi_m)\,V_{m-1}(0),\\ V_m\left(\dfrac{1}{2}\right)=(c_0+\chi_m)\,V_{m-1}\left(\dfrac{1}{2}\right)+c_0\,(\chi_m-1)\,,\\ V_m(1)+c_0\,\delta_{m-1}=(c_0+\chi_m)\,V_{m-1}(1),\end{cases} \tag{4–23}$$

其中 $(\cdot)^T$ 为转置算子，

$$\hat{\mathbf{V}}_k=\left\{V_k\left(\frac{0}{2^j}\right),V_k\left(\frac{1}{2^j}\right),V_k\left(\frac{2}{2^j}\right),\cdots,V_k\left(\frac{2^j}{2^j}\right)\right\}^T \tag{4–24}$$

和

$$\hat{\mathbf{R}}_m=\left\{R_m\left(\frac{0}{2^j}\right),R_m\left(\frac{1}{2^j}\right),R_m\left(\frac{2}{2^j}\right),\cdots,R_m\left(\frac{2^j}{2^j}\right)\right\}^T \tag{4–25}$$

均为 (2^j+1) 维列向量，

$$\mathbf{A}=\left\{a_{k,l}=\int_0^1\mathscr{L}\left[\varphi_{j,k}(x)\right]\varphi_{j,l}(x)\mathrm{d}x\right\}_{k=0,\ l=1}^{k=2^j,l=2^j-1} \tag{4–26}$$

和

$$\mathbf{B}=\left\{b_{k,l}=\int_0^1\varphi_{j,k}(x)\varphi_{j,l}(x)\mathrm{d}x\right\}_{k=0,\ \ l=1}^{k=2^j,\ l=2^j-1} \tag{4–27}$$

均为 $(2^j+1)\times(2^j-1)$ 矩阵.

需要指出的是，上述的 m 阶小波伽辽金形变方程组一共包含 2^j+2 个方程，2^j+2 个未知数，即向量 $\hat{\mathbf{V}}_m$ 和 δ_{m-1}，故正好可以封闭求解. 另外，1 阶小波伽辽金形变方程中包含 δ_0^2 项，故存在两组不同的解. 在 1 阶形变方程求解结束后，通过选择不同的解支，可以得到原边值问题的所有解.

4.2 结果分析

通过调节控制收敛参数 c_0，可以得到收敛的小波同伦解. 在第三章已经指出：迭代技术可以加快收敛. 因此，在本章中采用迭代小波同伦分析方法进行求解. 不失一般性，这里先以 Frank-Kamenetskii 参数 $\lambda = 2$ 为例对小波同伦分析方法在寻找多解中的有效性进行说明.

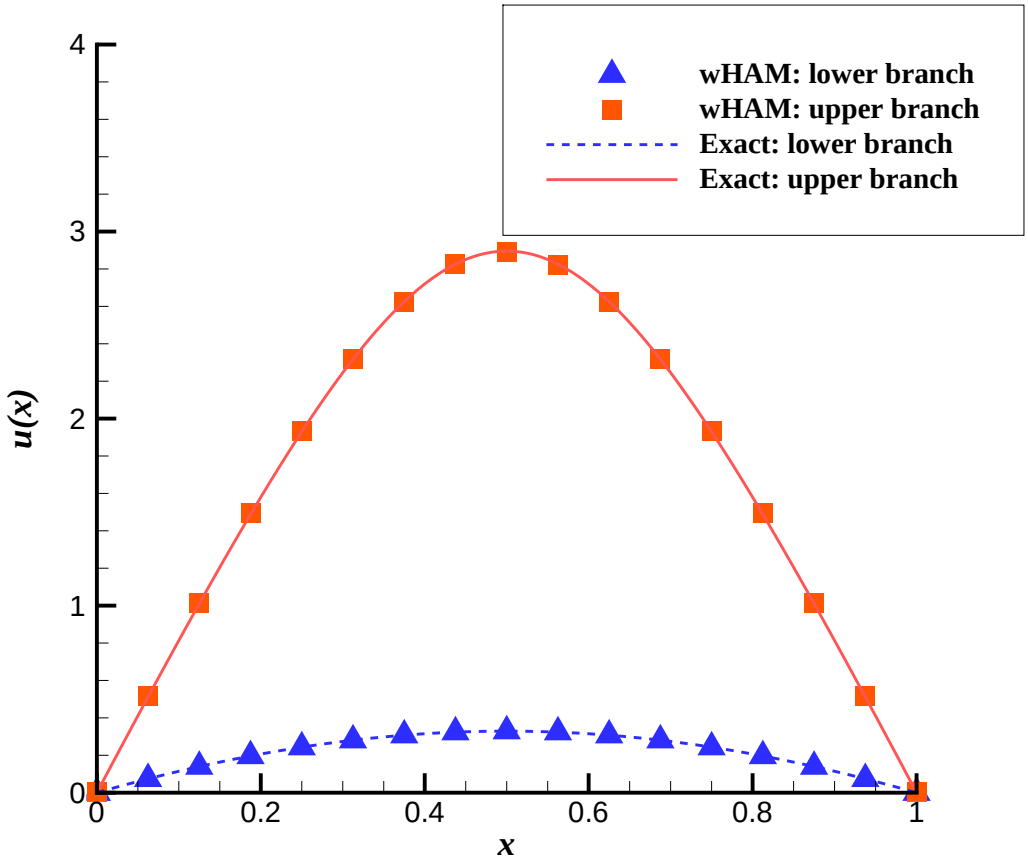

图 4–1 Frank-Kamenetskii 参数 $\lambda = 2$，分辨率水平 $j = 4$，辅助线性算子 $\mathscr{L}[\phi(x;q)] = \frac{\partial^2 \phi(x;q)}{\partial x^2}$ 时，上下两支小波同伦解与精确解的对比.

Fig. 4–1 Comparison between wHAM approximations and exact solutions in case of $\lambda = 2$, the resolution level $j = 4$ and the auxiliary linear operator $\mathscr{L}[\phi(x;q)] = \frac{\partial^2 \phi(x;q)}{\partial x^2}$. Dashed line: exact solution–lower branch; solid line: exact solution–upper branch; delta symbols: wHAM solution–lower branch; square symbols: wHAM solution–upper branch.

通过控制收敛参数 c_0 的调节测试，在下支解的求解中，取 $c_0 = -0.4$；上支解的求解中，取 $c_0 = -0.2$. 通过求解得到的上下两支小波同伦解与精确解的对比情况如图 4–1 所示. 显然，上下两支小波同伦解均与精确解吻合得非常好. 这表明小波同伦分析方法在多解问题的求解上是有效的.

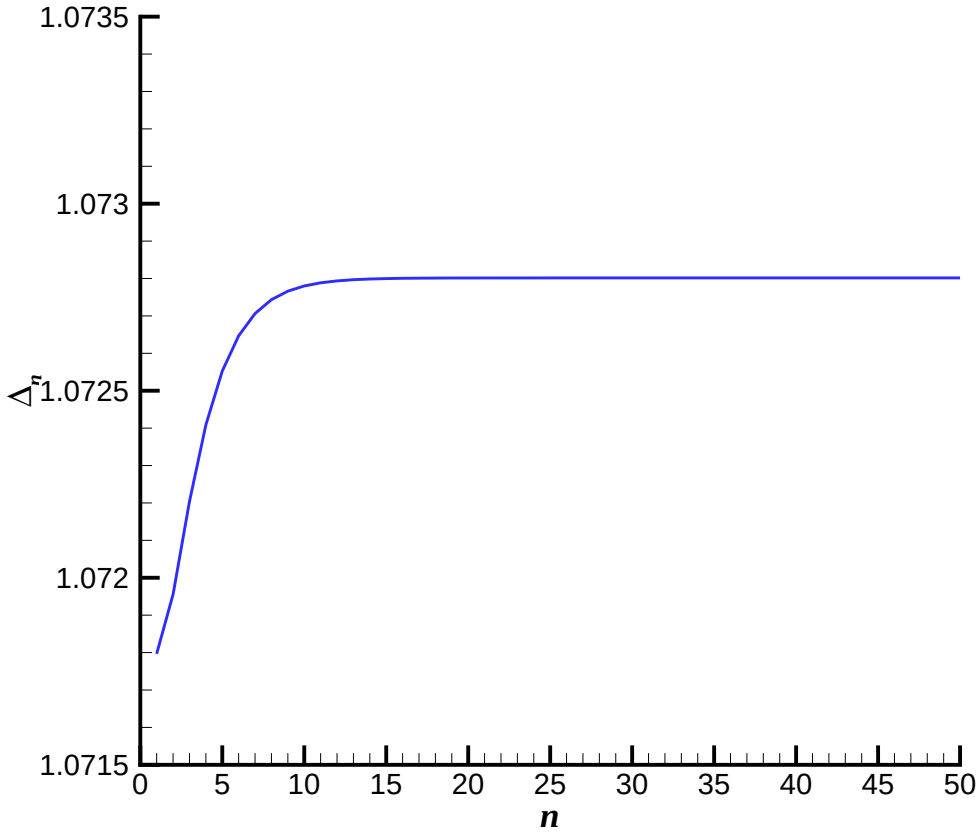

图 4–2 Frank-Kamenetskii 参数 $\lambda = 2$，分辨率水平 $j = 4$，辅助线性算子 $\mathscr{L}[\phi(x;q)] = \frac{\partial^2\phi(x;q)}{\partial x^2}$ 时，下支解参数 Δ_n 随迭代次数 n 的变化.

Fig. 4–2 The parameter Δ_n for lower solution versus iteration times n in case of the Frank-Kamenetskii parameter $\lambda = 2$, the resolution level $j = 4$ and the auxiliary linear operator $\mathscr{L}[\phi(x;q)] = \frac{\partial^2\phi(x;q)}{\partial x^2}$.

为了进一步对收敛情况进行说明，用 Δ_n 表示含参变量微分方程 (4–6) 和不定边界 (4–7) 中的重要参数 Δ 在第 n 次小波同伦迭代后的结果. 图 4–2 和

图 4–3 分别给出了 Frank-Kamenetskii 参数 $\lambda = 2$ 时求解下支解和上支解过程中参数 Δ_n 随着迭代次数 n 的变化情况. 从图中可以看出：随着迭代次数 n 的增加，参数 Δ_n 迅速收敛. 这说明本章提出的方法具有较好的收敛性，这进一步说明了小波同伦分析方法在多解问题求解中的有效性和潜力.

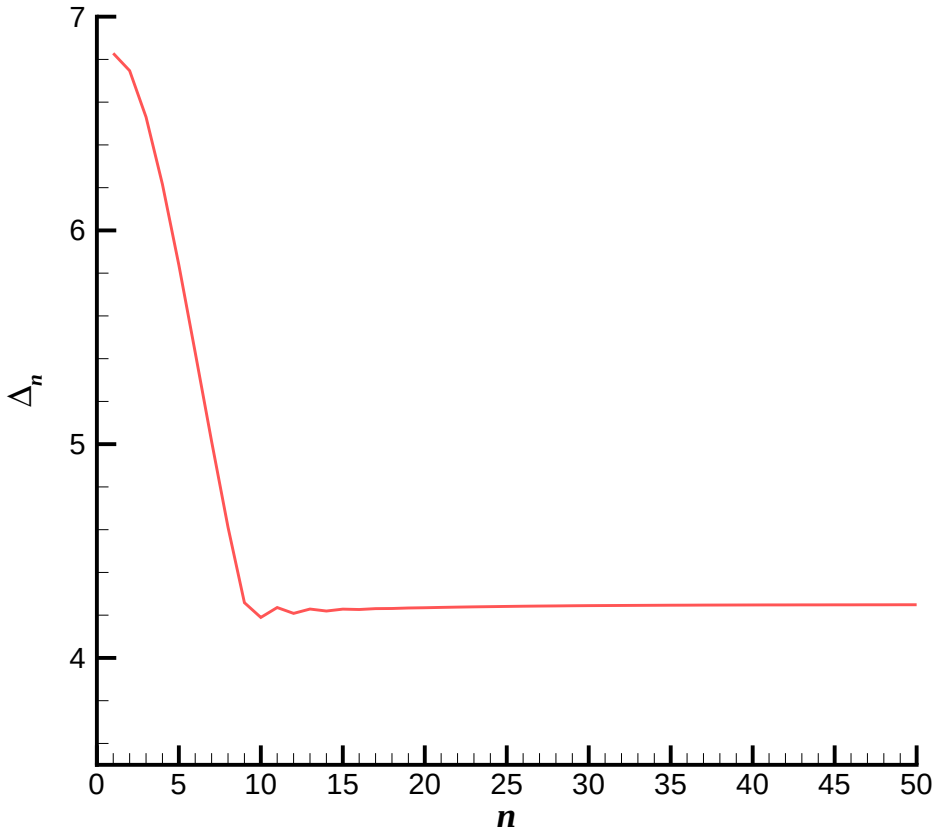

图 4–3 Frank-Kamenetskii 参数 $\lambda = 2$，分辨率水平 $j = 4$，辅助线性算子 $\mathscr{L}[\phi(x;q)] = \frac{\partial^2\phi(x;q)}{\partial x^2}$ 时，上支解参数 Δ_n 随迭代次数 n 的变化.

Fig. 4–3 The parameter Δ_n for lower solution versus iteration times n in case of the Frank-Kamenetskii parameter $\lambda = 2$, the resolution level $j = 4$ and the auxiliary linear operator $\mathscr{L}[\phi(x;q)] = \frac{\partial^2\phi(x;q)}{\partial x^2}$.

由上面的分析可以看出：小波同伦分析方法在多解问题的求解中能快速收敛，并得到可靠的小波逼近. 为了对本章提出的方法做一个更完整的对比与评

估，下面给出一维 Bratu 方程完整的 u_{max}–λ 曲线. 从第三章给出的精确解 (3–3)

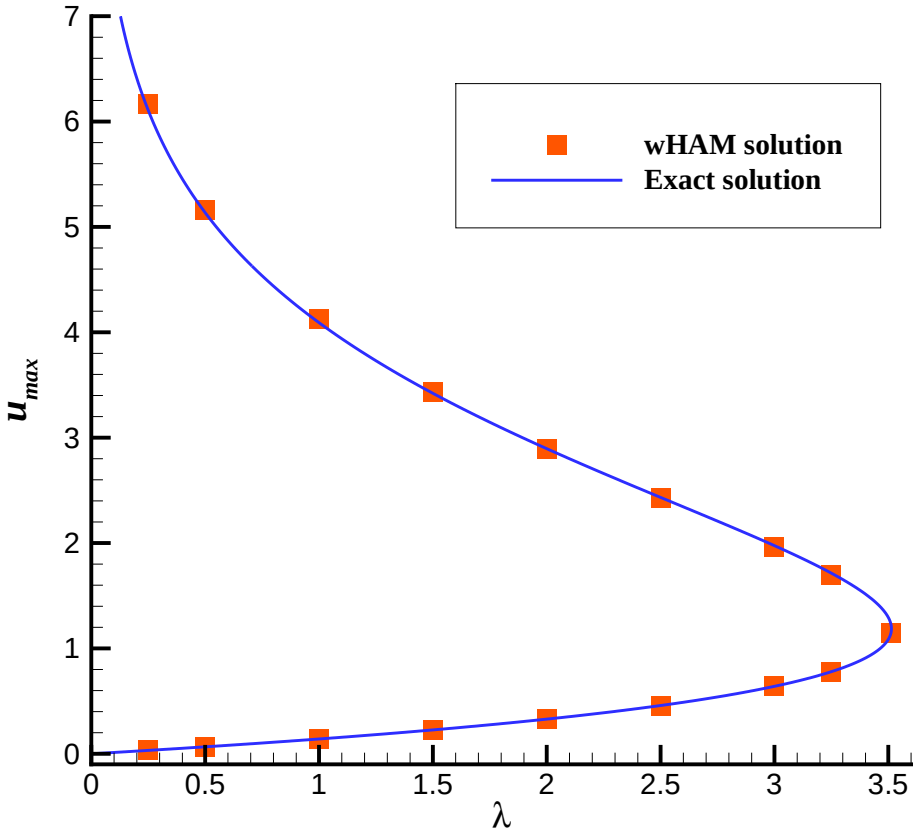

图 4–4 分辨率水平 $j = 4$，辅助线性算子 $\mathscr{L}[\phi(x;q)] = \frac{\partial^2\phi(x;q)}{\partial x^2}$ 时，不同 λ 下小波同伦解与精确解的对比.

Fig. 4–4 Comparison between wHAM approximations and exact solutions for different Frank-Kamenetskii parameters in case of the resolution level $j = 4$ and the auxiliary linear operator $\mathscr{L}[\phi(x;q)] = \frac{\partial^2\phi(x;q)}{\partial x^2}$. Line: exact solutions; symbols: wHAM solutions.

和 (3–4) 可得 u_{max}–λ 曲线的精确解可由下面的参数方程表示：

$$\begin{cases} \lambda = \dfrac{\theta^2}{2\cosh^2\left(\frac{\theta}{4}\right)}, \\ u_{max} = 2\ln\left[\cosh\left(\dfrac{\theta}{4}\right)\right]. \end{cases} \tag{4–28}$$

图 4–4 给出了不同 Frank-Kamenetskii 参数下小波同伦解与精确解的对比，显然，在整个解存在的区间 $\lambda \in (0, \lambda_c]$ 上，利用小波同伦分析方法得到的小波近似与精确解高度吻合.

4.3 本章小结

本章以一维 Bratu 方程作为范例介绍了利用小波同伦分析方法寻找多解的基本思想和主要求解策略. 通过引入可区分不同解支的参数，把原边值问题转化成了一个含参变量的非线性边值问题. 为了求解含参变量的边值问题，分别对控制方程与边界条件构造了相应的同伦，并推导出各自的高阶形变方程. 借助于一阶形变方程，可以通过非线性代数解的情况来定性地判断非线性微分方程解的个数；通过小波同伦分析方法的求解可以获得一维 Bratu 方程所有的解支.

该多解问题的计算结果说明：在小波同伦分析方法中，通过构造含参变量边值问题的方法不仅可以有效地寻找多解；而且在求解过程中，小波同伦分析方法表现出较好的收敛性. 这表明小波同伦分析方法在非线性多解问题的求解中具有很大的潜力.

第五章　解非线性偏微分方程的小波同伦分析方法

本章主要以二维 Bratu 方程 [127–129] 为模型，介绍求解偏微分方程的小波同伦分析方法 (wavelet homotopy analysis method, wHAM) 的基本思想与算法步骤，针对高阶形变方程右端项中偏导数的计算问题，提出基于截面曲线的快速算法，并通过计算结果进一步展示小波同伦分析方法的优势和潜力.

5.1　小波同伦分析方法的基本思想

小波同伦分析方法在非线性偏微分方程边值问题中的求解思想与基本的算法步骤和求解非线性常微分方程边值问题基本类似. 其主要差异在于:

(1) 在偏微分方程中，高维多分辨分析由一维多分辨空间的张量积来构造，这在第二章中已进行过说明;

(2) 在右端项的偏导数计算中，为了能更快速、更精确地进行计算求解，本论文不再采用第二章中给出的 (2–30) 式进行计算，而是提出一种基于截面曲线的快速算法.

下面，以二维 Bratu 方程为示范模型，对求解非线性偏微分方程的小波同伦分析方法的基本思想与算法步骤进行介绍.

5.1.1　问题描述

二维 Bratu 方程 [127–129] 为:

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2}+\lambda \mathrm{e}^{u(x,y)}=0,\quad 0<x,y<1, \tag{5–1}$$

相应的边界条件为:

$$u(0,y)=u(1,y)=u(x,0)=u(x,1)=0, \tag{5–2}$$

其中 λ 是一个大于 0 的参数，即 Frank-Kamenetskii 参数 [122].

根据文献 [122, 127, 129]，二维 Bratu 方程解的存在情况如下:

(1) 当 $0 < \lambda < \lambda_c$ 时，存在上下两支解；

(2) 当 $\lambda = \lambda_c$ 时，存在唯一解；

(3) 当 $\lambda > \lambda_c$ 时，无解；

其中，λ 的临界值 $\lambda_c \approx 6.808124423$. 为了简便，本章仅讨论二维 Bratu 方程在 $0 < \lambda < \lambda_c$ 时较为稳定的下支解.

同第三章的做法一样，引入变换：

$$V(x,y) = \exp\left[-\frac{1}{2}u(x,y)\right], \tag{5–3}$$

则原方程 (5–1) 转换为：

$$V(x,y)\nabla^2 V(x,y) - \nabla V(x,y)\cdot\nabla V(x,y) - \frac{\lambda}{2} = 0, \tag{5–4}$$

相应的边界条件为：

$$V(0,y) = V(1,y) = V(x,0) = V(x,1) = 1, \tag{5–5}$$

其中 ∇ 和 ∇^2 分别为梯度算子和 Laplace 算子.

5.1.2 基本同伦的构造

首先，根据方程 (5–4)，定义如下的非线性算子：

$$\mathscr{N}[\phi(x,y;q)] = \phi(x,y;q)\nabla^2\phi(x,y;q) - \nabla\phi(x,y;q)\cdot\nabla\phi(x,y;q) - \frac{\lambda}{2}. \tag{5–6}$$

并设 $V_0(x,y)$ 为一个初始猜测解，$\mathscr{L}$ 为辅助线性算子，c_0 为控制收敛参数，则通过同伦参数 $q \in [0,1]$ 可建立如下的零阶形变方程：

$$(1-q)\mathscr{L}\left[\phi(x,y;q) - V_0(x,y)\right] = c_0 q\mathscr{N}\left[\phi(x,y;q)\right], \tag{5–7}$$

相应的边界条件为：

$$\phi(0,y;q) = \phi(1,y;q) = \phi(x,0;q) = \phi(x,1;q) = 1. \tag{5–8}$$

显然，上述零阶形变方程 (5–7) 和边界条件 (5–8) 建立了从初始猜测解 $V_0(x,y)$ 到精确解 $V(x,y)$ 之间的一个同伦. 将 $\phi(x,y;q)$ 展开为同伦参数 q 的 Maclaurin 级数：

$$\phi(x,y;q) = V_0(x,y) + \sum_{k=1}^{+\infty} V_k(x,y) q^k, \tag{5–9}$$

其中，

$$V_k(x,y) = \mathscr{D}_k[\phi(x,y;q)] = \frac{1}{k!}\frac{\partial^k \phi(x,y;q)}{\partial q^k}\bigg|_{q=0}, \tag{5–10}$$

则根据 $\phi(x,y;1) = V(x,y)$ 得：

$$V(x,y) = V_0(x,y) + \sum_{k=1}^{+\infty} V_k(x,y), \tag{5–11}$$

相应的 m 阶逼近为：

$$\tilde{V}_m(x,y) = V_0(x,y) + \sum_{k=1}^{m} V_k(x,y). \tag{5–12}$$

在零阶形变方程 (5–7) 及边界条件 (5–8) 两端分别作用 m 阶同伦求导算子可得 m 阶形变方程：

$$\mathscr{L}\left[V_m(x,y) - \chi_m V_{m-1}(x,y)\right] = c_0 R_m(x,y) \tag{5–13}$$

及边界条件：

$$V_m(0,y) = V_m(1,y) = V_m(x,0) = V_m(x,1) = 0, \tag{5–14}$$

其中 χ_m 的定义与第三章 (3–18) 式相同，右端项 $R_m(x,y)$ 为：

$$\begin{aligned} R_m(x,y) &= \mathscr{D}_{m-1}\{\mathscr{N}[\phi(x,y;q)]\} \\ &= \sum_{s=0}^{m-1} V_s(x,y)\nabla^2 V_{m-1-s}(x,y) \\ &- \sum_{s=0}^{m-1} \nabla V_s(x,y)\cdot\nabla V_{m-1-s}(x,y) - \frac{\lambda}{2}(1-\chi_m). \end{aligned} \tag{5–15}$$

根据第三章提出的边界适应原则，选择初始猜测解为：

$$V_0(x,y) = 1, \tag{5–16}$$

它满足边界条件 (5–5).

辅助线性算子的选取遵从第三章提出的解存在原则和阶数匹配原则. 由于控制方程 (5–4) 为二阶偏微分方程，且关于自变量 x 和 y 具有对称性，故考虑 Laplace 算子：

$$\mathscr{L}[\phi(x,y;q)] = \nabla^2\phi(x,y;q). \tag{5–17}$$

显然，根据偏微分方程的相关理论，在边界条件 (5–14) 下，Laplace 算子能始终保证高阶形变方程 (5–13) 的解存在. 关于更一般形式的辅助线性算子，下文中还会做进一步讨论.

需要指出的是：虽然该辅助线性算子比较简单，但在传统同伦分析方法的框架下并不容易进行计算，因为拉普拉斯方程在区域 $[0,1]^2$ 上通解的形式极其复杂，具体为 [41, 130]：

$$\begin{aligned} V(x,y) = &\sum_{k=0}^{+\infty}[C_{k,1}\sinh(\alpha kx) + C_{k,2}\cosh(\alpha kx)][C_{k,3}\sin(\alpha ky) + C_{k,4}\cos(\alpha ky)] \\ &+ \sum_{k=0}^{+\infty}[C_{k,5}\sinh(\beta ky) + C_{k,6}\cosh(\beta ky)][C_{k,7}\sin(\beta kx) + C_{k,8}\cos(\beta kx)], \end{aligned} \tag{5–18}$$

其中系数 α, β 和 $C_{k,i}$ $(i = 1, 2, ...8)$ 由边界条件确定. 显然，若选择该算子，则在传统同伦分析方法的框架内是很难同时满足边界条件和解表达原则的. 而在小波同伦分析方法的框架内，则不存在这样的问题. 毫无疑问，这是小波同伦分析方法的一大优势.

那么，如何保证解的收敛性呢？首先，如第三章所述，小波同伦分析方法对不同的线性算子具有很强的适应性，故在小波同伦分析方法的框架内，选取合适的辅助线性算子比传统同伦分析方法要更为简单. 另一方面，控制收敛参数 c_0 提供了一个便捷的方法来控制解的收敛. 本节进一步给出选取控制收敛参数 c_0 的一些便捷方法. 一般而言，若辅助线性算子 $\mathscr{L}$ 的最高阶项的系数与非线性算子 $\mathscr{N}$ 相同，则 c_0 的有效区间是 $[-1, 0)$. 而在具体的选取中，传统同伦分析方法所提供的最优控制收敛参数 (optimal c_0) [41] 的选取方法，如有必要也可以在小波同伦分析方法中进行类似推广. 而在实际应用中，则可以采用二分法等更加简单的方法快速取得能保证解收敛的 c_0. 一般来说，解的收敛性对 c_0 的选取并不是非常敏感，故选取一个可接受的控制收敛参数并不困难. 关于这个问题，下文还会结合计算结果做进一步的分析.

5.1.3　小波同伦基本方程

利用第二章介绍的小波逼近 (2–29) 并考虑到边界条件 (5–14)，则 $V_m(x,y)$ 及右端项 $R_m(x,y)$ 可分别展开为：

$$V_m(x,y) \approx P^j V_m(x,y) = \sum_{k=1}^{2^j-1}\sum_{l=1}^{2^j-1} V\left(\frac{k}{2^j},\frac{l}{2^j}\right)\varphi_{j,k}(x)\varphi_{j,l}(y), \tag{5–19}$$

$$R_m(x,y) \approx P^j R_m(x,y) = \sum_{k=0}^{2^j}\sum_{l=0}^{2^j} R_m\left(\frac{k}{2^j},\frac{l}{2^j}\right)\varphi_{j,k}(x)\varphi_{j,l}(y), \tag{5–20}$$

其中，

$$\begin{aligned} R_m(\frac{k}{2^j},\frac{l}{2^j}) = &\sum_{s=0}^{m-1} V_s\left(\frac{k}{2^j},\frac{l}{2^j}\right)\nabla^2 V_{m-1-s}\left(\frac{k}{2^j},\frac{l}{2^j}\right) \\ &-\sum_{s=0}^{m-1}\nabla V_s\left(\frac{k}{2^j},\frac{l}{2^j}\right)\cdot\nabla V_{m-1-s}\left(\frac{k}{2^j},\frac{l}{2^j}\right) - \frac{\lambda}{2}(1-\chi_m). \end{aligned} \tag{5–21}$$

将 (5–19) 和 (5–20) 代入 m 阶形变方程 (5–13) 中，可得：

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{2^j-1}\sum_{l=1}^{2^j-1}\left[V_m\left(\frac{k}{2^j},\frac{l}{2^j}\right) - \chi_m V_{m-1}\left(\frac{k}{2^j},\frac{l}{2^j}\right)\right]\mathscr{L}\left[\varphi_{j,k}(x)\varphi_{j,l}(y)\right] \\ &\qquad = c_0\sum_{k=0}^{2^j}\sum_{l=0}^{2^j} R_m\left(\frac{k}{2^j},\frac{l}{2^j}\right)\varphi_{j,k}(x)\varphi_{j,l}(y). \end{aligned} \tag{5–22}$$

注意到与传统同伦分析方法不同的是：由于 m 阶形变方程的边界条件 (5–14) 已经嵌入到了 (5–19) 中，故此方程不需要额外添加边界条件了.

为了求解方程 (5–22)，以 $\varphi_{j,k}(x)\varphi_{j,l}(y)$ $(k,l=1,2,\cdots,2^j-1)$ 为权函数分别乘在其左右两端，并在 $[0,1]^2$ 区域上积分，得 m 阶小波伽辽金形变方程：

$$\mathbf{A}^T\, rvec\left(\mathbf{V_m} - \chi_m \mathbf{V_{m-1}}\right) = c_0\, \mathbf{B}^T\, rvec\left(\mathbf{R_m}\right), \tag{5–23}$$

其中 $rvec(\cdot)$ 为按行拉直算子，$\mathbf{V_m}$ 和 $\mathbf{V_{m-1}}$ 均为 $(2^j-1)\times(2^j-1)$ 矩阵，分别定义如下：

$$\begin{cases} \mathbf{V_m} = \left\{ v_{k,l} = V_m\left(\dfrac{k}{2^j},\dfrac{l}{2^j}\right)\right\}_{k,\,l=1}^{k,\,l=2^j-1}, \\ \mathbf{V_{m-1}} = \left\{ v_{k,l} = V_{m-1}\left(\dfrac{k}{2^j},\dfrac{l}{2^j}\right)\right\}_{k,\,l=1}^{k,\,l=2^j-1}, \end{cases} \tag{5–24}$$

$\mathbf{R_m}$ 为 $(2^j+1)\times(2^j+1)$ 矩阵，并由下式定义：

$$\mathbf{R_m}=\left\{r_{k,l}=R_m\left(\frac{k}{2^j},\frac{l}{2^j}\right)\right\}_{k,\,l=0}^{k,\,l=2^j}. \tag{5–25}$$

此外，系数矩阵 $\mathbf{A}$ 由辅助线性算子确定，系数矩阵 $\mathbf{B}$ 为常矩阵，它们分别为：

$$\mathbf{A}=\mathbf{A_0}\otimes\mathbf{A_2}+\mathbf{A_2}\otimes\mathbf{A_0} \tag{5–26}$$

和

$$\mathbf{B}=\mathbf{B_0}\otimes\mathbf{B_0}, \tag{5–27}$$

其中 $\otimes$ 表示 Kronecker 张量积，$\mathbf{A_0}$, $\mathbf{A_2}$ 均为 $(2^j-1)\times(2^j-1)$ 矩阵，$\mathbf{B_0}$ 为 $(2^j+1)\times(2^j-1)$ 矩阵，即：

$$\begin{cases}\mathbf{A_0}=\left\{a_{k,l}=\Gamma_{k,l}^{j,0}\right\}_{k,\,l=1}^{k,\,l=2^j-1}\\ \mathbf{A_2}=\left\{a_{k,l}=\Gamma_{k,l}^{j,2}\right\}_{k,\,l=1}^{k,\,l=2^j-1}\\ \mathbf{B_0}=\left\{b_{k,l}=\Gamma_{k,l}^{j,0}\right\}_{k=0,\quad l=1}^{k=2^j,\;l=2^j-1},\end{cases} \tag{5–28}$$

其中 $\Gamma_{k,l}^{j,n}$ 为第二章 (2–32) 式所定义的连接系数.

通过求解 m 阶小波伽辽金形变方程 (5–23) ($m=1,2,3,\cdots$)，并将计算结果代回 (5–12)，可得到原方程的高阶近似小波同伦解.

5.1.4　偏导数的快速算法

在 m 阶形变方程右端项的计算过程中，需要求 $V_s(x,y)$ ($s=1,2,...,m-1$) 对变量 x 和 y 的一阶偏导和二阶偏导. 关于偏导数的计算，实际上第二章给出的小波逼近 (2–30) 已经提供了一般的算法.

然而，通过进一步的分析不难发现：小波逼近 (2–30) 所给出的算法并不是一个好的选择. 一方面，该表达式包含项数太多，这会导致算法复杂度的增加. 另一方面，广义 Coiflet 小波衰减非常迅速，这势必导致 (2–30) 式中存在很多小量. 从科学计算角度来讲，过多小量的求和会导致有效位损失，精度下降. 因此，不管从精度和效率上来说，(2–30) 式给出的小波逼近都不是一个好的选择.

为了解决这个问题，本论文提出基于截面曲线的快速算法. 为了说明算法的基本思想，定义空间 $\mathbb{V}_j^2$ 上的偏投影算子 P_x^j 和 P_y^j 如下：

$$V_s(x,y)\approx P_x^jV_s(x,y)=\sum_{k=0}^{2^j}V_s\left(\frac{k}{2^j},y\right)\varphi_{j,k}(x), \tag{5–29}$$

$$V_s(x,y) \approx P_y^j V_s(x,y) = \sum_{l=0}^{2^j} V_s\left(x, \frac{l}{2^j}\right) \varphi_{j,l}(y). \tag{5–30}$$

从几何意义上来讲，函数 $z = V_s(x,y)$ 代表了三维空间里的一张曲面，而一阶偏导数 $\frac{\partial V_s(x,y)}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial V_s(x,y)}{\partial y}$ 分别表示不同方向截面曲线的斜率；更进一步地，高阶偏导数也代表着某一族截面曲线的几何属性. 因此，在计算偏导数过程中不必采用整张曲面的小波逼近，而直接对截面曲线逼近即可. 分别对 (5–29) 和 (5–30) 求 n 阶导数，可求得 $\frac{\partial^n V_s(x,y)}{\partial x^n}$ 和 $\frac{\partial^n V_s(x,y)}{\partial y^n}$，即：

$$\frac{\partial^n V_s(x,y)}{\partial x^n} \approx \frac{\partial^n P_x^j V_s(x,y)}{\partial x^n} = \sum_{k=0}^{2^j} V_s\left(\frac{k}{2^j}, y\right) \frac{\mathrm{d}^n \varphi_{j,k}(x)}{\mathrm{d}x^n}, \tag{5–31}$$

$$\frac{\partial^n V_s(x,y)}{\partial y^n} \approx \frac{\partial^n P_y^j V_s(x,y)}{\partial y^n} = \sum_{l=0}^{2^j} V_s\left(x, \frac{l}{2^j}\right) \frac{\mathrm{d}^n \varphi_{j,l}(y)}{\mathrm{d}y^n}. \tag{5–32}$$

表 5–1 给出了不同分辨率水平下常规算法与本论文提出的快速算法的求和项数对比. 显然，新的快速算法比原来的常规算法要高效得多.

表 5–1 求偏导数的常规算法与快速算法在不同分辨率水平下的求和项数对比.

Table 5–1 Comparison on the number of terms between the general algorithm and the fast algorithm for the approximation of partial derivatives at different resolution level.

分辨率水平	项数	
	常规算法	快速算法
$j=3$	81	9
$j=4$	289	17
$j=5$	1089	33
$j=6$	4225	65

根据第二章的**引理 2.1**，新算法的误差估计如下：

$$\left\| \frac{\partial^n f(x,y)}{\partial x^n} - \frac{\partial^n P_x^j f(x,y)}{\partial x^n} \right\|_{L^2} \le C 2^{-j(N-n)}, \tag{5–33}$$

其中 C 是一个仅依赖于函数 $f(x,y)$ 和低通滤波系数 p_k 的非负常数，N 为消失矩数，且 $0 \le n < N$. 若 $n = 0$，则 (5–33) 给出了小波逼近 (5–29) 的误差估计. 关于变量 y 的偏导数的误差估计也可同理得到.

从误差估计来看，常规算法和快速算法在误差上处于同一量级，但实际上由于常规算法涉及较多的小量求和，故从数值上来说，快速算法在精度上也要高于常规算法. 另外，该算法可以很容易地推广到更高维的问题，而算法复杂度不会增加.

5.2 结果分析

为了便于对比，以下所有结果均在同一台计算机上计算得到，计算机的相关配置为：DELL Inspiron 3847, Intel(R) Core (TM) i5-4460 CPU@ 3.20GHz.

5.2.1 收敛性分析

在小波同伦分析方法中，可以通过调节控制收敛参数 c_0 来保证解的收敛. 不失一般性，这里 Frank-Kamenetskii 参数 $\lambda = 1$ 为例进行分析. 为了保证收敛，下面的计算中均取 $c_0 = -0.4$.

表 5–2 不同 Frank-Kamenetskii 参数 λ 下，由加权残数法 (WRM)、传统同伦分析方法 (HAM)、小波同伦分析方法 (wHAM) ($j = 5, c_0 = -0.4$) 及小波同伦迭代技术 (i.wHAM) ($j = 5, c_0 = -0.4$) 得到的解的最大值对比.

Table 5–2 The maximum values of the solutions by the WRM, the normal HAM, the wHAM ($j = 5, c_0 = -0.4$) and the iterative wHAM ($j = 5, c_0 = -0.4$) for different values of Frank-Kamenetskii parameter λ.

λ	u_{max}			
	WRM [128]	HAM [41]	wHAM	i.wHAM
1.0	0.07795	0.07810	0.07810	0.07810
2.0	0.16659	0.16689	0.16690	0.16690
3.0	0.26985	0.27036	0.27037	0.27037
4.0	0.39453	0.39552	0.39554	0.39554
5.0	0.55439	0.55696	0.55697	0.55697
6.0	0.78711	0.79711	0.79710	0.79710

图 5–1 给出了分辨率水平 $j = 5$ 时 $y = 1/2$ 处 1 阶、5 阶、10 阶、20 阶及 50 阶小波同伦解的截面曲线. 由图可知：随着阶数的增加，小波同伦解迅速收

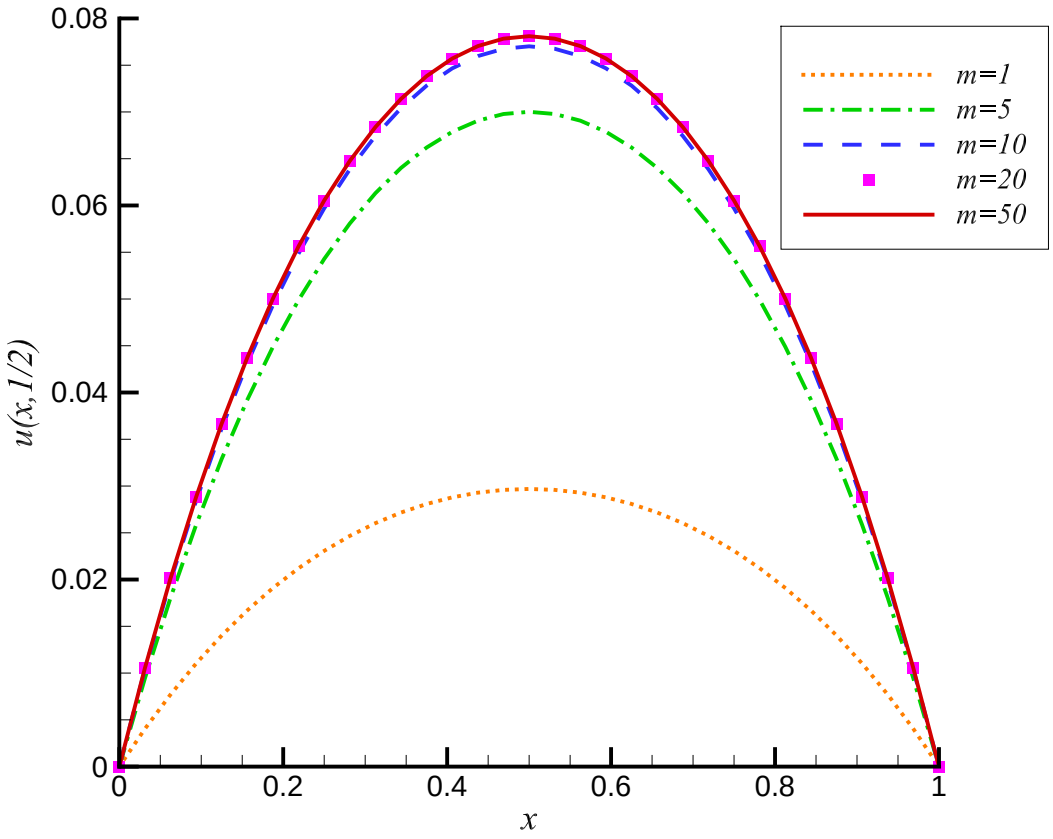

图 5–1 Frank-Kamenetskii 参数 $\lambda = 1$，分辨率水平 $j = 5$，控制收敛参数 $c_0 = -0.4$ 时，不同阶数小波同伦解对应的截面曲线.

Fig. 5–1 Section curves at the different orders of approximation, given by the wHAM with the resolution level $j = 5$ and the convergence-control parameter $c_0 = -0.4$. dotted line: $m = 1$; dash-dotted line: $m = 5$; dashed line: $m = 10$; square symbols: $m = 20$; solid line: $m = 50$.

敛. 特别地，20 阶的小波同伦解已经和 50 阶的解完全重合.

为了进一步的分析，定义残差为:

$$ResErr_m = \frac{1}{(2^j+1)^2}\sum_{k=0}^{2^j}\sum_{l=0}^{2^j}\left[\tilde{u}_m\left(\frac{k}{2^j},\frac{l}{2^j}\right) - \tilde{u}_{m-1}\left(\frac{k}{2^j},\frac{l}{2^j}\right)\right]^2, \qquad (5\text{–}34)$$

其中 $\tilde{u}_m(x,y)$ 和 $\tilde{u}_{m-1}(x,y)$ 分别为 m 阶及 $(m-1)$ 阶小波同伦解. 从残差曲线

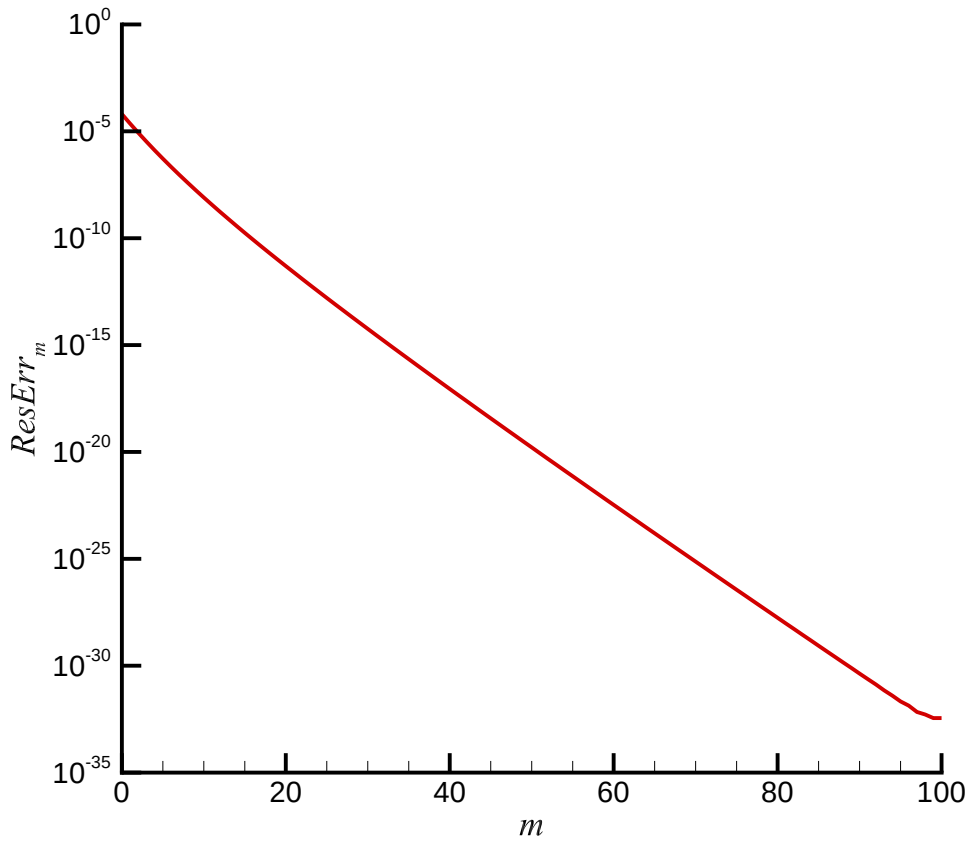

图 5–2 Frank-Kamenetskii 参数 $\lambda = 1$，分辨率水平 $j = 5$，控制收敛参数 $c_0 = -0.4$ 时，残差随阶数 m 的变化.

Fig. 5–2 Residual error of the solution versus the approximation order m in case of $\lambda = 1$ at the resolution level $j = 5$ by means of the convergence-control parameter $c_0 = -0.4$.

图 5–2 可以看出：随着阶数的增加，残差迅速下降. 这说明小波同伦分析方法具有较好的收敛性.

通过求解，可获得不同 Frank-Kamenetskii 参数下的小波逼近. 表 5–2 给出了不同 λ 下，由加权残数法 (WRM) [128]、传统同伦分析方法 (HAM) [41]、小波同伦分析方法 (wHAM) $(j = 5, c_0 = -0.4)$ 及小波同伦迭代技术 (i.wHAM) $(j = 5, c_0 = -0.4)$ 得到的解的最大值 $u_{max} = u(1/2, 1/2)$ 的对比. 显然，由小波同伦分析方法 (wHAM) 及小波同伦迭代技术 (i.wHAM) 得到的解与

其他两种方法得到的解吻合得非常好.

5.2.2　计算效率分析

廖世俊 [41] 曾用传统同伦分析方法，以幂函数为基函数，以 $\mathscr{L}[\phi(x,y;q)] = \frac{c_1}{xy}\frac{\partial^2\phi(x,y;q)}{\partial x\partial y} + c_2\frac{\partial^4\phi(x,y;q)}{\partial x^2\partial y^2}$ 为辅助线性算子 (经优化后取 $c_1 = 0$) 对二维 Bratu 方程进行过求解，下面将小波同伦分析方法与传统同伦分析方法的求解效率进行对比.

与一维情形不一样，二维 Bratu 方程没有精确解析解. 为了将传统同伦分析方法、小波同伦分析方法及小波同伦迭代技术进行对比，本论文选取分辨率水平 $j = 6$ 时的 120 阶小波同伦解作为参照 (记为 $u_{ref}(x,y)$)，定义如下的均方误差:

$$ErrSQ_m = \frac{1}{(2^j+1)^2}\sum_{k=0}^{2^j}\sum_{l=0}^{2^j}\left[\tilde{u}_m\left(\frac{k}{2^j},\frac{l}{2^j}\right) - u_{ref}\left(\frac{k}{2^j},\frac{l}{2^j}\right)\right]^2, \qquad (5\text{–}35)$$

其中 $\tilde{u}_m(x,y)$ 为 m 阶逼近，j 为小波的分辨率水平 (在传统同伦分析方法中仅作为求和项数的参数).

表 5–3 分别给出了由传统同伦分析方法 (HAM)、小波同伦分析方法 (wHAM) 及小波同伦迭代技术 (i.wHAM) 求解得到的 50 阶逼近的最大值 $u_{max} = u(1/2,1/2)$、均方误差 $ErrSQ_{50}$ 及对应的 CPU 耗时. 显然，小波同伦分析方法及小波同伦迭代技术的 CPU 耗时要比传统同伦分析方法要少得多. 当分辨率水平 $j \le 5$ 时，采用小波同伦分析方法及小波同伦迭代技术获得 50 阶逼近仅需要不到 2 秒的 CPU 耗时；分辨率水平 $j = 6$ 时也仅需大约 40 秒的 CPU 耗时. 然而，传统同伦分析方法则需要 1950 秒，为小波同伦分析方法的数十倍. 另外，当分辨率水平 $j \ge 5$ 时，50 阶小波同伦解的精度要高于传统同伦分析方法. 由此可见：相对于传统同伦分析方法，小波同伦分析方法不仅在求解效率上占据绝对优势，在求解精度上也要略胜一筹. 此外，小波同伦迭代技术 (i.wHAM) 可显著加速收敛，如图 5–3所示.

5.2.3　辅助线性算子的影响分析

为了进一步揭示辅助线性算子的选取对解的收敛情况的影响，这里进一步考虑更一般形式的辅助线性算子. 考虑到方程 (5–4) 为二阶非线性偏微分方程，

表 5–3 Frank-Kamenetskii 参数 $\lambda = 1$ 时，由传统同伦分析方法 (HAM) ($c_0 = -1, c_1 = 0, c_2 = -1/2$)、小波同伦分析方法 (wHAM) ($c_0 = -0.4$) 和小波同伦迭代技术 (i.wHAM) ($c_0 = -0.4$) 得到的 50 阶逼近对应的函数最大值 u_{max}、均方误差 $ErrSQ_{50}$ 以及 CPU 耗时.

Table 5–3 The 50th-order approximation of u_{max}, the corresponding averaged square error and the used CPU time in case of $\lambda = 1$ by the normal HAM ($c_0 = -1, c_1 = 0, c_2 = -1/2$), the wHAM ($c_0 = -0.4$) and the iterative wHAM ($c_0 = -0.4$).

	j	u_{max}	$ErrSQ_{50}$	CPU time/sec
HAM	–	0.07810	1.27×10^{-10}	1950.0
wHAM	4	0.07815	2.33×10^{-09}	0.56
wHAM	5	0.07810	2.50×10^{-11}	1.78
wHAM	6	0.07810	1.00×10^{-18}	42.56
i.wHAM	4	0.07815	2.33×10^{-09}	0.47
i.wHAM	5	0.07810	2.50×10^{-11}	1.71
i.wHAM	6	0.07810	1.54×10^{-23}	39.15

表 5–4 Frank-Kamenetskii 参数 $\lambda = 1$，分辨率水平 $j = 5$，控制收敛参数 $c_0 = -0.4$ 时，采用不同辅助线性算子得到的 50 阶小波同伦解的均方误差及所对应的 CPU 耗时.

Table 5–4 The averaged square error and used CPU time for 50th-order approximation given by means of the wHAM with different auxiliary linear operators in case of $\lambda = 1$, $c_0 = -0.4$ and $j = 5$.

κ_1	κ_0	Err_{50}	CPU time/sec
0	0	2.50×10^{-11}	1.78
0	1	2.50×10^{-11}	1.89
0	5	2.50×10^{-11}	1.88
1	0	2.50×10^{-11}	1.95
5	0	2.51×10^{-11}	1.96
1	1	2.50×10^{-11}	2.02
5	5	2.47×10^{-11}	2.02

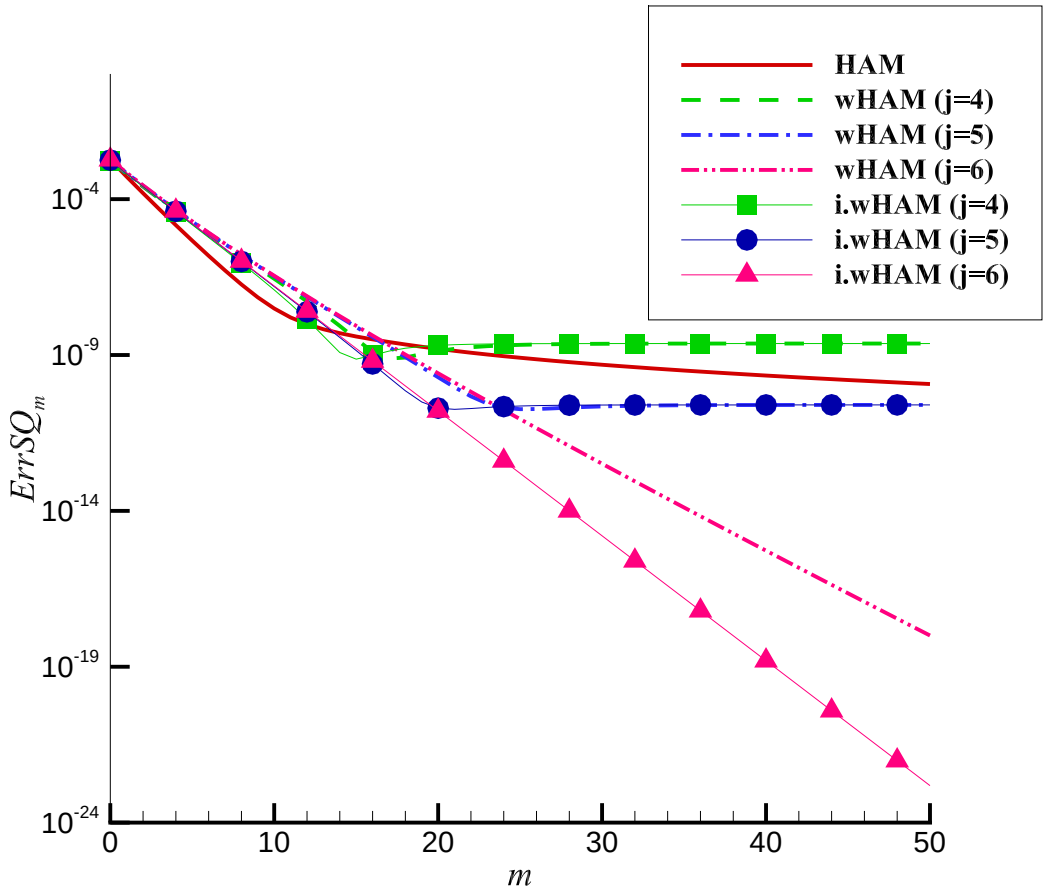

图 5–3 Frank-Kamenetskii 参数 $\lambda = 1$ 时，由传统同伦分析方法 (HAM) ($c_0 = -1, c_1 = 0, c_2 = -1/2$)、小波同伦分析方法 (wHAM) ($c_0 = -0.4$) 和小波同伦迭代技术 (i.wHAM) ($c_0 = -0.4$) 得到的解的均方误差随阶数或迭代次数的变化.

Fig. 5–3 The averaged square error versus the approximation order or the iteration time in the case of $\lambda = 1$ by means of the normal HAM ($c_0 = -1, c_1 = 0, c_2 = -1/2$), the wHAM ($c_0 = -0.4$) an iterative wHAM ($c_0 = -0.4$) at the different resolution levels. Solid line: HAM; dashed line: wHAM with $j = 4$; dash-dotted line: wHAM with $j = 5$; dash-dot-dotted line: wHAM with $j = 6$; line with square symbols: iterative wHAM with $j = 4$; line with circle symbols: iterative wHAM with $j = 5$; line with delta symbols: iterative wHAM with $j = 6$.

并且方程本身关于变量 x 和 y 具有对称性，故选择一般形式的二阶线性算子

为:

$$\mathscr{L}[\phi(x,y;q)] = \frac{\partial^2\phi(x,y;q)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi(x,y;q)}{\partial y^2} + \kappa_1\left[\frac{\partial\phi(x,y;q)}{\partial x} + \frac{\partial\phi(x,y;q)}{\partial y}\right] + \kappa_0\phi(x,y;q), \tag{5–36}$$

其中 κ_0 和 κ_1 均为常数，不同的 κ_0 和 κ_1 对应着不同的辅助线性算子.

对 $\lambda = 1$ 的情形，统一采用分辨率水平 $j = 5$、控制收敛参数 $c_0 = -0.4$ 进行求解. 采用不同辅助线性算子 ($\kappa_0 \in [0,5]$ ，$\kappa_1 \in [0,5]$) 得到的 50 阶小波同伦解的均方误差及对应的 CPU 耗时如表 5–4 所示. 有趣的是，尽管采用了不同的辅助线性算子，但小波同伦解的均方误差及 CPU 耗时都几乎不受影响. 实际上，与其他的解析近似方法，比如摄动法相比，传统的小波同伦分析方法已经提供了很大的选取辅助线性算子之自由. 然而，正如表 5–4 所示，在小波同伦分析方法的框架下，辅助线性算子选取之自由得到了极大的扩展. 因此，对于给定的非线性偏微分方程，在小波同伦分析方法的框架下选择一个合适的线性算子将变得更加容易. 这正是小波同伦分析方法优势与潜力之所在.

5.2.4　控制收敛参数影响分析

控制收敛参数 c_0 在同伦分析方法中具有重要意义 [41, 55]. 为了进一步说明该参数在小波同伦分析方法中对解的收敛情况的影响，本节针对 Frank-Kamenetskii 参数 $\lambda = 1$，分辨率水平 $j = 5$，线性算子为 Laplace 算子，即 $\kappa_0 = \kappa_1 = 0$ 的情形，采用不同的控制收敛参数 c_0 对二维 Bratu 方程进行了求解. 通过求解得到的 50 阶小波同伦解的均方误差 $ErrSQ_{50}$ 及对应的 CPU 耗时如表 5–5所示. 从表中可以看出：当 $c_0 \in [-0.4, -0.2]$ 时，50 阶小波同伦解的均方误差和 CPU 耗时都几乎相同；而当 $c_0 \in (-0.2, 0)$ 时，同样可以求得收敛的小波同伦解，只不过收敛速度要慢一些. 由此可见：在小波同伦分析方法中，计算效率对控制收敛参数 c_0 的选取并不是很敏感. 因此，在小波同伦分析方法中，选取一个适当的控制收敛参数并不困难.

5.3　本章小结

本章主要以二维 Bratu 方程为示范模型，介绍了求解非线性偏微分方程边值问题的小波同伦分析方法的基本思想与算法步骤，并针对右端项的计算，提

表 5–5 Frank-Kamenetskii 参数 $\lambda = 1$，分辨率水平 $j = 5$，辅助线性算子参数 $\kappa_0 = \kappa_1 = 0$ 时，采用不同控制收敛参数得到的 50 阶小波同伦解的均方误差及所对应的 CPU 耗时.
Table 5–5 The averaged square error and used CPU time for 50th-order approximation given by means of the wHAM using different convergence-control parameters in case of $\lambda = 1, \kappa_0 = \kappa_1 = 0$ and $j = 5$.

c_0	Err_{50}	CPU time/sec
-0.10	1.89×10^{-07}	1.77
-0.15	2.30×10^{-09}	1.78
-0.20	2.96×10^{-11}	1.79
-0.25	2.18×10^{-11}	1.79
-0.30	2.46×10^{-11}	1.78
-0.35	2.50×10^{-11}	1.77
-0.40	2.50×10^{-11}	1.78

出了求偏导数的快速小波算法. 在此基础上，通过计算结果的对比和讨论，分析了小波同伦分析方法的主要优势.

小波同伦分析方法不仅继承了传统同伦分析方法最重要的优势，同时也表现出许多新的亮点，它们主要是:

(1) 通过调节控制收敛参数，可以保证解的收敛，而且在小波同伦分析方法中，由于解的收敛速度及计算效率对控制收敛参数的选取不敏感，故很容易选取适当的控制收敛参数求得原非线性边值问题的解;

(2) 相对于传统的同伦分析方法，小波同伦分析方法不仅大大扩展了辅助线性算子选取之自由，而且由于解的收敛性与计算效率对辅助线性算子的选取并不敏感，故在小波同伦分析方法中选择一个适当的辅助线性算子变得更加容易，这在很大程度上保证了小波同伦分析方法对复杂问题的适用性以及在具体应用中的便捷性;

(3) 在偏微分方程的求解中，小波同伦分析方法在求解效率上相对于传统的同伦分析方法表现出绝对的优势;

(4) 小波同伦迭代技术可以显著加速解的收敛.

此外，本章所介绍的求解思想和方法均可直接推广到更高维度的非线性边值问题的求解. 毫无疑问，小波同伦分析方法在更加复杂的科学与工程非线性问题中具有广阔的应用前景和巨大的发展潜力.

第六章　非齐次边界条件的小波处理方法

在微分方程边值问题的求解中，常常伴随非齐次边界条件的处理. 而能否正确处理这些非齐次边界条件，则往往能够决定方法的有效性. 对于线性微分方程，往往比较容易通过简单的变换将边界条件齐次化；而对于非线性微分方程而言，由于线性叠加原理不再成立，故齐次化变得非常困难，退一步来讲，就算能够找到某个变换使之齐次化，也往往会使控制方程的形式变得更加复杂. 那么，对于广义 Coiflet 小波来说，能否直接处理一般形式的非齐次边界条件呢？

广义 Coiflet 小波具有光滑性、紧支性、正交性和拟插值性，这为边界条件的处理带来许多好处. 在过去的研究与应用中，王记增等 [29, 112, 114, 115, 120] 提出和发展了一种类似于 Taylor 展开的边界延拓法 (详见第二章)，并使用该方法求解了大量的微分方程. 然而，在过去的文献中，该方法仅处理了一部分简单的齐次边界条件和第一类非齐次边界条件 (即 Dirichlet 边界条件) 的情形，对于一般的非齐次边界条件问题，并未给出一般的解决方案.

为此，本章在王记增等人的基础上，经过进一步的推广，给出了一套利用广义 Coiflet 小波处理非齐次边界条件的一般方法. 这套方法的提出，不仅极大地扩展了小波同伦分析方法的适用范围，为其带来新的发展契机，同时利于普通小波方法的推广和应用.

6.1　三类常见的边界条件

科学与工程中最常遇到的边界条件有三大类：Dirichlet 边界条件 (Dirichlet boundary condition)、Neumann 边界条件 (Neumann boundary condition) 和 Robin 边界条件 (Robin boundary condition). 它们虽然都是线性边界条件，但在很多领域都极具代表性. 可以说，这三类边界条件代表了大部分的物理问题. 若用 Ω 表示某个物理问题的求解区域 (或区间)，$\partial\Omega$ 表示求解区域 (或区间) 的边界，$u(\mathbf{x})$ 表示待求解的函数，则三类边界条件可描述如下：

第一类边界条件，即 Dirichlet 边界条件，是指在求解区域的边界 $\partial\Omega$ 上，

给定函数 $u(\mathbf{x})$ 的值，即：

$$u\Big|_{\partial\Omega} = \mu\left(\partial\Omega\right), \tag{6–1}$$

其中 μ 为给定的已知函数或数值. Dirichlet 边界条件具有广泛的物理意义，例如：在弹性力学梁理论及板壳理论中，Dirichlet 边界表示梁 (或者板) 在边界上的位置被固定；热力学中，表示在边界上具有恒定的温度；静电学中，表示某个结点上具有固定的电压；粘性流体力学中，无滑移边界条件表示在固体表面上流体与固体具有相同的运动速度等等.

第二类边界条件，即 Neumann 边界条件，是指在求解区域的边界 $\partial\Omega$ 上，给定函数 $u(\mathbf{x})$ 的法向导数值，即：

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\bigg|_{\partial\Omega} = \nu\left(\partial\Omega\right), \tag{6–2}$$

其中 ν 为给定的已知函数或数值. 它可在力学中表示给定的运动速度，热力学中表示确定的热流量等.

第三类边界条件，即 Robin 边界条件，是指在求解区域的边界 $\partial\Omega$ 上，给定函数 $u(\mathbf{x})$ 本身及其法向导数线性组合的值，即：

$$\left[\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} + \sigma u\right]\bigg|_{\partial\Omega} = \nu\left(\partial\Omega\right), \tag{6–3}$$

其中 σ 为已知的非零常数，ν 为给定的已知函数或数值. 它可在弹性力学中表示表示弹性支承，热力学中表示自由热交换等.

6.2　非齐次边界条件的小波处理方法

为了对一般的非齐次线性边界条件进行直接的处理，与第二章类似，对任意的函数 $f(x) \in C[0,1]$，采用如下的边界延拓：

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{i=0}^{3} \frac{d_{0,i}}{i!} x^i, & x \in (-\delta, 0) \\ f(x), & x \in [0,1] \\ \displaystyle\sum_{i=0}^{3} \frac{d_{1,i}}{i!} (x-1)^i, & x \in (1, \delta) \end{cases} \tag{6–4}$$

由于边界延拓 (6–4) 是从 Taylor 发展而来，故系数 $d_{0,i}$ 和 $d_{1,i}$ 实际上分别代表了函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 和 $x=1$ 处的导数. 基于此，可直接逼近三类线性非齐次边界条件.

为了适应不同类型的非齐次边界条件，将 $d_{0,i}$ 和 $d_{1,i}$ 表示如下：

$$\begin{cases} d_{0,i} = \sum_{k=0}^{3} p_{0,i,k} f_{j,k} + \alpha_{0,i}, \\ d_{1,i} = \sum_{k=0}^{3} p_{1,i,k} f_{j,2^j-k} + \alpha_{1,i}. \end{cases} \tag{6–5}$$

其中，$p_{0,i,k}$, $\alpha_{0,i}$, $p_{1,i,k}$ 和 $\alpha_{1,i}$ 的取法如下：

(1) 若给出的边界条件与导数无关，则令 $\alpha_{0,i}=0$，$\alpha_{1,i}=0$，$p_{0,i,k}$ 和 $p_{1,i,k}$ 表示半边差分系数，由第二章给出的矩阵 (2–20) 通过关系 $\mathbf{P_0}=\{2^{-ij}p_{0,i,k}\}$ 和 $\mathbf{P_1}=\{2^{-ij}p_{1,i,k}\}$ 得到.

(2) 若给出的边界条件与 $x=0$ 或 $x=1$ 处的第 i 阶导数相关，则令 $p_{0,i,k}=0$ 或 $p_{1,i,k}=0$，$k=0,1,2,3$，并把 $\alpha_{0,i}$ 或 $\alpha_{1,i}$ 取为相关导数的表达式.

将 (6–5) 代入 (6–4)，得：

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} \sum_{k=0}^{3} \left[f_{j,k} T_{0,k}(x) + \dfrac{\alpha_{0,k}}{k!} x^k \right], & x \in (-\delta, 0) \\ f(x), & x \in [0,1] \\ \sum_{k=0}^{3} \left[f_{j,2^j-k} T_{1,k}(x) + \dfrac{\alpha_{1,k}}{k!} (x-1)^k \right], & x \in (1, \delta) \end{cases} \tag{6–6}$$

其中，

$$\begin{cases} T_{0,k}(x) = \sum_{i=0}^{3} \dfrac{p_{0,i,k}}{i!} x^i, \\ T_{1,k}(x) = \sum_{i=0}^{3} \dfrac{p_{1,i,k}}{i!} (x-1)^i. \end{cases} \tag{6–7}$$

基于上述延拓及下面的广义 Coiflet 小波逼近：

$$f(x) \approx \sum_{k=2-3N+M_1}^{2^j-1+M_1} \widetilde{f}\left(\frac{M_1+k}{2^j} \right) \varphi(2^j x - k), \quad x \in [0,1], \tag{6–8}$$

可得三种线性非齐次边界条件的处理方法，其中，$\varphi(x)$ 为广义 Coiflet 小波的尺度函数，M_1 为尺度函数的一阶矩，N 为消失矩数，j 为分辨率水平. 下面，以一维形式为例，介绍三类非齐次边界条件的一般性处理方法，而高维边值问题以及混合边值问题的处理可直接推广.

6.2.1 Dirichlet 边界条件

Dirichlet 边界条件的处理方法，王记增等 [112, 115] 已经给出，并且在前面的章节中也已经得到成功应用，这里仅做归纳.

一维 Dirichlet 边界条件一般形式为:

$$u(x)\Big|_{x=0} = \mu_0,\ u(x)\Big|_{x=1} = \mu_1, \tag{6–9}$$

其中 μ_0 和 μ_1 均为常数.

该类边值问题的处理十分简单，只需把 μ_0 和 μ_1 直接代入第二章给出的小波逼近 (2–25) 中即可，即:

$$u(x) \approx P^j u(x) = \sum_{k=1}^{2^j-1} u\left(\frac{k}{2^j}\right)\varphi_{j,k}(x) + \mu_0\varphi_{j,0}(x) + \mu_1\varphi_{j,2^j}(x), \tag{6–10}$$

其中，$\varphi_{j,k}$ 为第二章 (2–23) 式定义的基函数. 相应的导数逼近为:

$$\frac{\mathrm{d}^n u(x)}{\mathrm{d}x^n} \approx \frac{\mathrm{d}^n P^j u(x)}{\mathrm{d}x^n} = \sum_{k=1}^{2^j-1} f\left(\frac{k}{2^j}\right)\frac{\mathrm{d}^n\varphi_{j,k}(x)}{\mathrm{d}x^n} + \mu_0\frac{\mathrm{d}^n\varphi_{j,0}(x)}{\mathrm{d}x^n} + \mu_1\frac{\mathrm{d}^n\varphi_{j,2^j}(x)}{\mathrm{d}x^n}. \tag{6–11}$$

6.2.2 Neumann 边界条件

一维 Neumann 边界条件的一般形式如下:

$$\frac{\mathrm{d}u(x)}{\mathrm{d}x}\bigg|_{x=0} = \nu_0,\ \frac{\mathrm{d}u(x)}{\mathrm{d}x}\bigg|_{x=1} = \nu_1. \tag{6–12}$$

根据本章给出的边界延拓方法，Neumann 边界条件的处理分两步进行.

第一步，将基函数 $\varphi_{j,k}(x)$ 修正为:

$$h_{j,k}(x) = \varphi_{j,k}(x)\Big|_{p_{0,1,k}\to 0,\ p_{1,1,k}\to 0}. \tag{6–13}$$

第二步，将相关导数按照延拓方法嵌入小波逼近 (6–8)，得：

$$u(x) \approx \sum_{k=0}^{2^j} u\left(\frac{k}{2^j}\right) h_{j,k}(x) + \sum_{i=2-3N+M_1}^{-1} \nu_0 \frac{i}{2^j} \varphi\left(2^j x - i + M_1\right) + \sum_{i=2^j+1}^{2^j-1+M_1} \nu_1 \left(\frac{i}{2^j} - 1\right) \varphi\left(2^j x - i + M_1\right), \tag{6–14}$$

其中，$\varphi_{j,k}$ 为第二章 (2–23) 式定义的基函数，$\varphi(x)$ 为广义 Coiflet 小波的尺度函数，M_1 为尺度函数的一阶矩. 相应的导数逼近为：

$$\frac{\mathrm{d}^n u(x)}{\mathrm{d}x^n} \approx \sum_{k=0}^{2^j} u\left(\frac{k}{2^j}\right) \frac{\mathrm{d}^n h_{j,k}(x)}{\mathrm{d}x^n} + \sum_{i=2-3N+M_1}^{-1} \nu_0 \frac{i}{2^j} \frac{\mathrm{d}^n \varphi\left(2^j x - i + M_1\right)}{\mathrm{d}x^n} + \sum_{i=2^j+1}^{2^j-1+M_1} \nu_1 \left(\frac{i}{2^j} - 1\right) \frac{\mathrm{d}^n \varphi\left(2^j x - i + M_1\right)}{\mathrm{d}x^n}. \tag{6–15}$$

实际上，Neumann 边界条件的处理方法可进一步推广到已知 m 阶导数的情形，即：

$$\left.\frac{\mathrm{d}^m u(x)}{\mathrm{d}x^m}\right|_{x=0} = \nu_0, \quad \left.\frac{\mathrm{d}^m u(x)}{\mathrm{d}x^m}\right|_{x=1} = \nu_1. \tag{6–16}$$

此时，做如下修正即可：

第一步，将基函数 $\varphi_{j,k}(x)$ 修正为：

$$h_{j,k}(x) = \varphi_{j,k}(x)\Big|_{p_{0,m,k}\to 0,\ p_{1,m,k}\to 0}. \tag{6–17}$$

第二步，将相关导数按照延拓方法嵌入小波逼近 (6–8)，得：

$$u(x) \approx \sum_{k=0}^{2^j} u\left(\frac{k}{2^j}\right) h_{j,k}(x) + \sum_{i=2-3N+M_1}^{-1} \nu_0 \frac{1}{m!} \left(\frac{i}{2^j}\right)^m \varphi\left(2^j x - i + M_1\right) + \sum_{i=2^j+1}^{2^j-1+M_1} \nu_1 \frac{1}{m!} \left(\frac{i}{2^j} - 1\right)^m \varphi\left(2^j x - i + M_1\right). \tag{6–18}$$

6.2.3 Robin 边界条件

一维 Robin 边界条件的一般形式如下：

$$\begin{cases} \left[\dfrac{\mathrm{d}u(x)}{\mathrm{d}x}+\sigma_0 u(x)\right]\Big|_{x=0}=\nu_0, \\ \left[\dfrac{\mathrm{d}u(x)}{\mathrm{d}x}+\sigma_1 u(x)\right]\Big|_{x=1}=\nu_1. \end{cases} \tag{6–19}$$

根据本章给出的边界延拓方法，Robin 边界条件的处理分三步进行.

第一步，将函数 $T_{0,k}(x), T_{1,k}(x)$ 修正为：

$$\widetilde{T}_{0,k}=\begin{cases} T_{0,k}(x)-\sigma_0 x, & k=0, \\ T_{0,k}(x), & k>0, \end{cases} \tag{6–20}$$

和

$$\widetilde{T}_{1,k}=\begin{cases} T_{1,k}(x)-\sigma_1(x-1), & k=0, \\ T_{1,k}(x), & k>0. \end{cases} \tag{6–21}$$

第二步，将基函数 $\varphi_{j,k}(x)$ 修正为：

$$\omega_{j,k}(x)=\varphi_{j,l}(x)\Big|_{p_{0,1,k}\to 0,\ p_{1,1,k}\to 0,\ T_{0,k}(x)\to\widetilde{T}_{0,k}(x),\ T_{1,k}(x)\to\widetilde{T}_{1,k}(x)}. \tag{6–22}$$

第三步，将相关导数的表达式按照延拓方法嵌入小波逼近 (6–8)，得：

$$\begin{aligned} u(x)\approx&\sum_{k=0}^{2^j}u\left(\frac{k}{2^j}\right)\omega_{j,k}(x)+\sum_{i=2-3N+M_1}^{-1}\nu_0\frac{i}{2^j}\varphi\left(2^jx-i+M_1\right) \\ &+\sum_{i=2^j+1}^{2^j-1+M_1}\nu_1\left(\frac{i}{2^j}-1\right)\varphi\left(2^jx-i+M_1\right), \end{aligned} \tag{6–23}$$

相应的导数逼近为：

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}^n u(x)}{\mathrm{d}x^n}\approx&\sum_{k=0}^{2^j}u\left(\frac{k}{2^j}\right)\frac{\mathrm{d}^n\omega_{j,k}(x)}{\mathrm{d}x^n}+\sum_{i=2-3N+M_1}^{-1}\nu_0\frac{i}{2^j}\frac{\mathrm{d}^n\varphi\left(2^jx-i+M_1\right)}{\mathrm{d}x^n} \\ &+\sum_{i=2^j+1}^{2^j-1+M_1}\nu_1\left(\frac{i}{2^j}-1\right)\frac{\mathrm{d}^n\varphi\left(2^jx-i+M_1\right)}{\mathrm{d}x^n}. \end{aligned} \tag{6–24}$$

6.2.4　混合边界条件

混合边界条件分为 3 种情况：

(1) 在整个边界 $\partial\Omega$ 上，同时满足多种边界条件. 这种情况多出现在高阶微分方程的边值问题中.

(2) 整个边界 $\partial\Omega$ 被划分为多段，即：$\partial\Omega=\partial\Omega_1\bigcup\partial\Omega_2\bigcup...\bigcup\partial\Omega_n$，而在各部分边界上，分别满足不同类型的边界条件. 这种情况多出现在高维边值问题中.

(3) 以上两种情况的混合.

针对第 (1) 种情况，只需同时做多个修正. 例如：在一维边值问题中，若同时给出 Dirichlet 边界条件和 Neumann 边界条件，则采用以下逼近：

$$\begin{aligned}u(x)\approx&\sum_{k=1}^{2^j-1}u\left(\frac{k}{2^j}\right)h_{j,k}(x)+\mu_0h_{j,0}(x)+\mu_1h_{j,2^j}(x)\\&+\sum_{i=2-3N+M_1}^{-1}\nu_0\frac{i}{2^j}\varphi\left(2^jx-i+M_1\right)\\&+\sum_{i=2^j+1}^{2^j-1+M_1}\nu_1\left(\frac{i}{2^j}-1\right)\varphi\left(2^jx-i+M_1\right).\end{aligned}\tag{6–25}$$

针对第 (2) 种情况，只需在不同的边界上采用不同的修正即可. 例如：在一维边值问题中，若左端给出 Dirichlet 边界条件，右端给出 Robin 边界条件，则先将基函数修正为：

$$\widetilde{\omega}_{j,k}(x)=\varphi_{j,l}(x)\Big|_{p_{1,1,k}\to0,\,T_{1,k}(x)\to\widetilde{T}_{1,k}(x)},\tag{6–26}$$

然后采用如下小波逼近：

$$\begin{aligned}u(x)\approx&\sum_{k=1}^{2^j}u\left(\frac{k}{2^j}\right)\widetilde{\omega}_{j,k}(x)+\mu_0\widetilde{\omega}_{j,0}(x)\\&+\sum_{i=2^j+1}^{2^j-1+M_1}\nu_1\left(\frac{i}{2^j}-1\right)\varphi\left(2^jx-i+M_1\right).\end{aligned}\tag{6–27}$$

第 (3) 种情况和高维边值问题可类似推广.

6.3 计算实例

小波同伦分析方法 (wHAM) 总能把非线性微分方程转化为线性微分方程. 因此，只要能高精度、高效率地求解线性微分方程的边值问题，就可以用小波同伦分析方法求解任意的非线性边值问题. 下面结合计算实例对本章给出的非齐次边界条件处理方法之应用及有效性进行说明.

6.3.1 Dirichlet–Neumann 混合边界条件实例

考虑如下的常微分方程:

$$\frac{\mathrm{d}^2u(x)}{\mathrm{d}x^2}-2\pi\frac{\mathrm{d}u(x)}{\mathrm{d}x}+2\pi^2u(x)=0,\ \ 0<x<1 \tag{6–28}$$

及 Dirichlet-Neumann 混合边界条件:

$$u(x)\Big|_{x=0}=0,\ \ \frac{\mathrm{d}u(x)}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=1}=-1. \tag{6–29}$$

其精确解为:

$$u(x)=\frac{1}{\pi}\mathrm{e}^{\pi(x-1)}\sin\pi x. \tag{6–30}$$

根据给出的边界条件，基函数左端应按照 Dirichlet 边界条件进行修正，右端按照 Neumann 边界条件修正，即:

$$\widetilde{h}_{j,k}(x)=\varphi_{j,k}(x)\Big|_{p_{1,1,k}\to 0}, \tag{6–31}$$

由此得到函数 $u(x)$ 的小波逼近:

$$\begin{aligned}u(x)\approx&\sum_{k=1}^{2^j}u\left(\frac{k}{2^j}\right)\widetilde{h}_{j,k}(x)+\mu_0\widetilde{h}_{j,0}(x)\\&+\sum_{i=2^j+1}^{2^j-1+M_1}\nu_1\left(\frac{i}{2^j}-1\right)\varphi\left(2^jx-i+M_1\right),\end{aligned} \tag{6–32}$$

其中，$\mu_0=0$，$\nu_0=-1$.

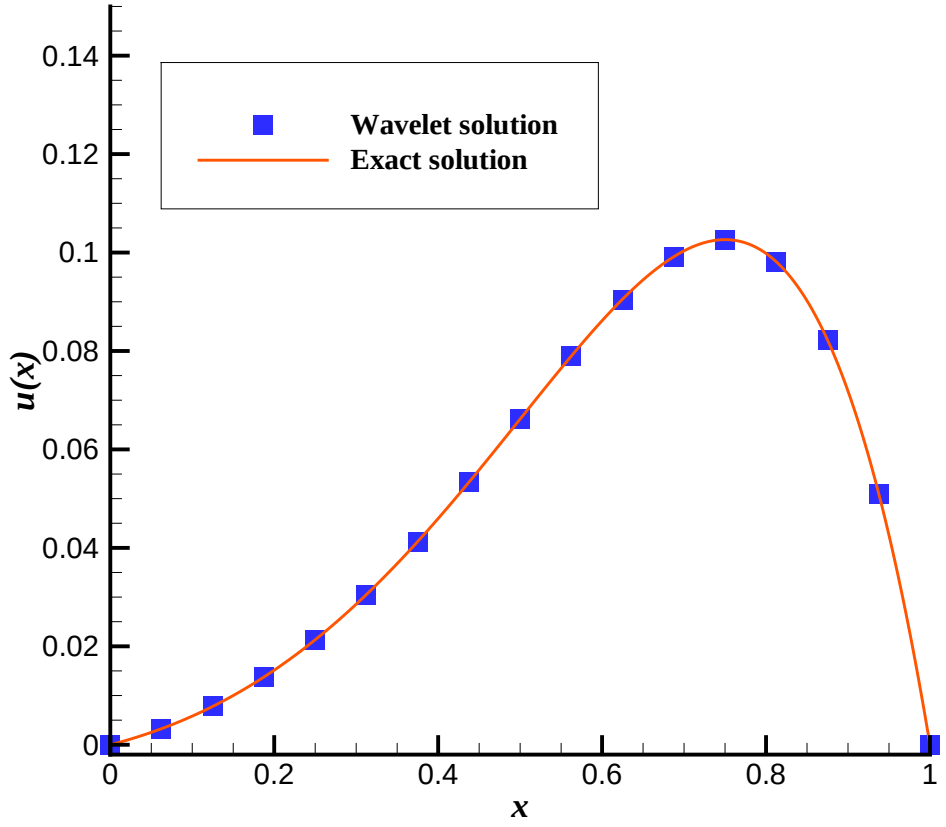

图 6–1 分辨率水平 $j = 4$ 时，Dirichlet–Neumann 混合边值问题 (6–28) 和 (6–29) 的小波解与精确解之对比.

Fig. 6–1 Comparison of the wavelet solution at the resolution level $j = 4$ with the exact solution for the Dirichlet–Neumann mixed boundary value problem (6–28) and (6–29). Solid line: exact solution; square symbols: wavelet solution.

将小波逼近 (6–32) 代入方程 (6–28) 得:

$$\sum_{k=1}^{2^j} u\left(\frac{k}{2^j}\right)\left[\frac{\mathrm{d}^2\widetilde{h}_{j,k}(x)}{\mathrm{d}x^2} - 2\pi\frac{\mathrm{d}\widetilde{h}_{j,k}(x)}{\mathrm{d}x} + 2\pi^2\widetilde{h}_{j,k}(x)\right]$$
$$-\sum_{k=2^j+1}^{2^j-1+M_1}\left(\frac{i}{2^j}-1\right)\left[\frac{\mathrm{d}^2\varphi\left(\eta_{j,k}(x)\right)}{\mathrm{d}x^2} - 2\pi\frac{\mathrm{d}\varphi\left(\eta_{j,k}(x)\right)}{\mathrm{d}x} + 2\pi^2\varphi\left(\eta_{j,k}(x)\right)\right] = 0, \tag{6–33}$$

其中，$\eta_{j,k}(x)=2^j x-k+M_1$.

以 $\widetilde{h}_{j,l}(x)$ $(l=1,2,...,2^j)$ 为权函数，由小波伽辽金方法，得：

$$\mathbf{A}^T\mathbf{u}=\mathbf{B}^T\mathbf{v_1}, \tag{6–34}$$

其中，

$$\begin{cases}\mathbf{A}=\mathbf{A_2}-2\pi\ \mathbf{A_1}+2\pi^2\ \mathbf{A_0},\\ \mathbf{B}=\mathbf{C_2}-2\pi\ \mathbf{C_1}+2\pi^2\ \mathbf{C_0},\end{cases} \tag{6–35}$$

$$\begin{cases}\mathbf{u}=\left\{u_k=u\left(\dfrac{k}{2^j}\right)\right\}_{k=1}^{k=2^j},\\ \mathbf{v_1}=\left\{v_k=\left(\dfrac{k}{2^j}-1\right)\right\}_{k=2^j+1}^{k=2^j-1+M_1}.\end{cases} \tag{6–36}$$

矩阵 $\mathbf{A_n}$ 和 $\mathbf{B_n}$ 定义如下：

$$\begin{cases}\mathbf{A_n}=\left\{a_{kl}=\displaystyle\int_0^1\frac{\mathrm{d}^n\widetilde{h}_{j,k}(x)}{\mathrm{d}x^n}\widetilde{h}_{j,l}(x)\mathrm{d}x\right\}_{k,\ l=1}^{k,\ l=2^j},\\ \mathbf{B_n}=\left\{b_{kl}=\displaystyle\int_0^1\frac{\mathrm{d}^n\varphi\left(\eta_{j,k}(x)\right)}{\mathrm{d}x^n}\widetilde{h}_{j,l}(x)\mathrm{d}x\right\}_{k=2^j+1,\quad l=1}^{k=2^j-1+M_1,\ l=2^j}.\end{cases} \tag{6–37}$$

通过求解线性方程组 (6–34)，可得到 Dirichlet–Neumann 混合边值问题 (6–28) 和 (6–29) 的解.

表 6–1 不同分辨率水平下，Dirichlet–Neumann 混合边值问题 (6–28) 和 (6–29) 的小波解之均方误差 $ErrSQ$ 与 CPU 耗时.

Table 6–1 The averaged square error and the used CPU time of the wavelet solution at different resolution levels for the Dirichlet–Neumann mixed boundary value problem (6–28) and (6–29).

j, resolution level	$ErrSQ$	CPU time (sec.)
3	3.62×10^{-07}	0.36
4	3.05×10^{-09}	0.43
5	1.70×10^{-11}	0.59
6	7.89×10^{-14}	1.01

图 6–1 给出了分辨率水平 $j = 4$ 时，Dirichlet–Neumann 混合边值问题 (6–28) 和 (6–29) 的小波解与精确解的对比，可见二者吻合得非常好. 这说明本章给出的非齐次边界条件处理方法对 Dirichlet 边界条件及 Neumann 边界条件是适用的. 进一步地，表 6–1 给出了不同分辨率水平下，小波解的均方误差与整个求解过程的 CPU 耗时. 均方误差 $ErrSQ$ 定义如下：

$$ErrSQ = \frac{1}{2^j + 1} \sum_{k=0}^{2^j} \left[u_w(\frac{k}{2^j}) - u_e(\frac{k}{2^j}) \right]^2, \tag{6–38}$$

其中 $u_e(x)$ 为精确解，$u_w(x)$ 为小波解. 从表中可以看出：随着分辨率水平的提高，小波解的精度迅速提高，而不同分辨率水平下所需要的 CPU 耗时则均在 1 秒以内. 这说明本章给出的非齐次边界条件处理方法不仅有效，而且具有较高的求解效率.

6.3.2 Robin 边界条件实例

考虑如下的常微分方程：

$$\frac{\mathrm{d}^2 u(x)}{\mathrm{d}x^2} - 2\frac{\mathrm{d}u(x)}{\mathrm{d}x} + 2u(x) = 0, \quad 0 < x < 1 \tag{6–39}$$

表 6–2 不同分辨率水平下，Robin 边值问题 (6–39) 和 (6–40) 的小波解之均方误差 $ErrSQ$ 与 CPU 耗时.

Table 6–2 The averaged square error and the used CPU time of the wavelet solution at different resolution levels for the Robin boundary value problem (6–39) and (6–40).

j, resolution level	$ErrSQ$	CPU time (sec.)
3	4.90×10^{-07}	0.55
4	3.51×10^{-09}	0.65
5	2.48×10^{-11}	0.88
6	1.18×10^{-13}	1.42

及 Robin 边界条件：

$$\begin{cases} \left[\dfrac{\mathrm{d}u(x)}{\mathrm{d}x} - u(x)\right]\Big|_{x=0} = 0, \\ \left[\dfrac{\mathrm{d}u(x)}{\mathrm{d}x} - u(x)\right]\Big|_{x=1} = -1. \end{cases} \tag{6–40}$$

其精确解为：

$$u(x) = \mathrm{e}^{x-1}\cos x. \tag{6–41}$$

同理，将小波逼近 (6–23) 及相关边界值代入方程 (6–39)，并以 $\omega_{j,l}(x)$ ($l = 0, 1, 2, \ldots, 2^j$) 为权函数，由小波伽辽金方法可类似地求解该边值问题.

图 6–2 给出了分辨率水平 $j = 4$ 时，Robin 边值问题 (6–39) 和 (6–40) 的小波解与精确解的对比，可见二者吻合得非常好. 这说明本章给出的非齐次边界条件处理方法对 Robin 边界条件也是适用的. 表 6–2 进一步给出不同分辨率水平下小波解的均方误差与 CPU 耗时，可见本章所给出的方法可在很短的 CPU 时间内获得高精度的解，这进一步说明了该方法对非齐次边界条件的有效性与求解之高效性.

6.3.3　全混合边界条件实例

考虑 Laplace 方程：

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = 0, \quad 0 < x, y < 1 \tag{6–42}$$

及全混合边界条件：

$$\begin{cases} \left[\dfrac{\partial u(x,y)}{\partial x} - \dfrac{\pi}{2}u(x,y)\right]\Big|_{x=0} = \nu_0(y) = 0, \\ \dfrac{\partial u(x,y)}{\partial x}\Big|_{x=1} = \nu_1(y) = \sin\left(\dfrac{\pi y}{2}\right), \\ u(x,y)\Big|_{y=0} = \mu_0(x) = 0, \\ u(x,y)\Big|_{y=1} = \mu_1(x) = \dfrac{2}{\pi}\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}(x-1)}. \end{cases} \tag{6–43}$$

其精确解为：

$$u(x) = \frac{2}{\pi}\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}(x-1)}\sin\left(\frac{\pi y}{2}\right). \tag{6–44}$$

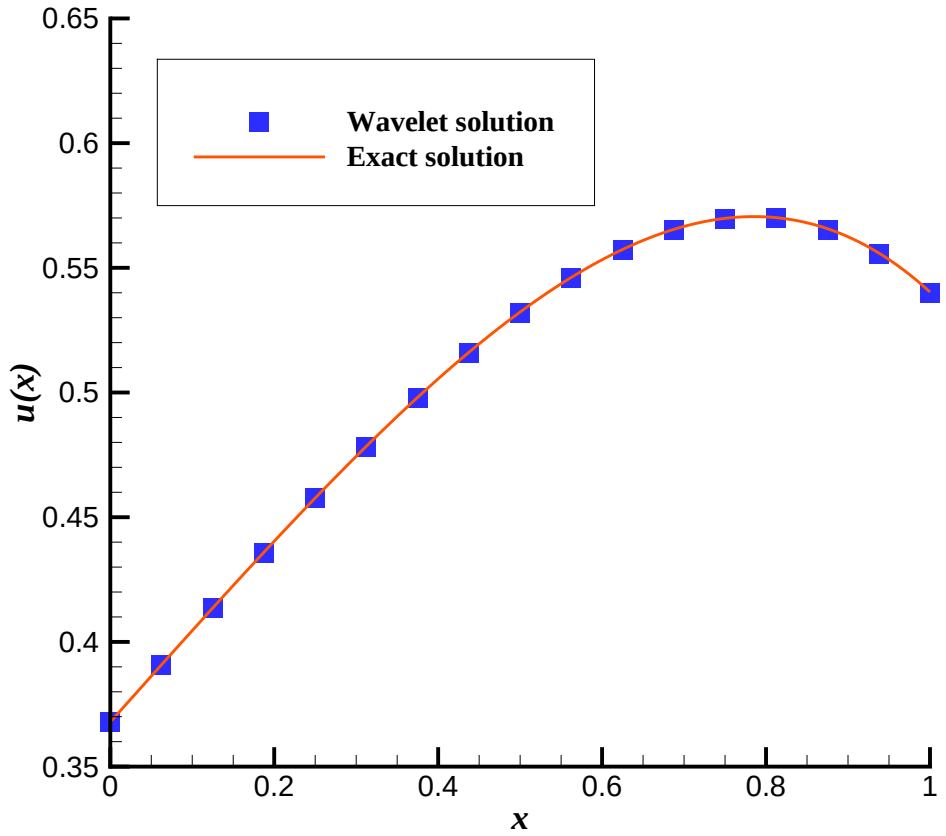

图 6–2 分辨率水平 $j = 4$ 时，Robin 边值问题 (6–39) 和 (6–40) 的小波解与精确解之对比.
Fig. 6–2 Comparison of the wavelet solution at the resolution level $j = 4$ with the exact solution for the Robin boundary value problem (6–39) and (6–40). Solid line: exact solution; square symbols: wavelet solution.

根据给出的边界条件，对于变量 x，基函数左端为应按 Robin 边界条件修正，右端按照为 Neumann 边界条件修正，即:

$$H_{j,k}(x) = \varphi_{j,k}(x)\Big|_{p_{0,1,k}\to 0,\ T_{0,k}(x)\to \widetilde{T}_{0,k}(x),\ p_{1,1,k}\to 0}, \tag{6–45}$$

对于变量 y，左右两端均为 Dirichlet 边界条件，故采用 $\varphi_{j,l}(y)$ 作为基函数.

由此可得，满足边界条件 (6–43) 的小波逼近为：

$$\begin{aligned} u(x,y) \approx & \sum_{k=0}^{2^j}\sum_{l=1}^{2^j-1} u\left(\frac{k}{2^j},\frac{l}{2^j}\right) H_{j,k}(x)\varphi_{j,l}(y) \\ & + \sum_{k=0}^{2^j}\left[\mu_0\left(\frac{k}{2^j}\right) H_{j,k}(x)\varphi_{j,0}(y) + \mu_1\left(\frac{k}{2^j}\right) H_{j,k}(x)\varphi_{j,2^j}(y)\right] \\ & + \sum_{k=2-3N+M_1}^{-1}\sum_{l=0}^{2^j} \nu_0\left(\frac{l}{2^j}\right)\frac{k}{2^j}\varphi\left(\eta_{j,k}(x)\right)\varphi_{j,l}(y) \\ & + \sum_{k=2^j+1}^{2^j-1+M_1}\sum_{l=0}^{2^j} \nu_1\left(\frac{l}{2^j}\right)\left(\frac{k}{2^j}-1\right)\varphi\left(\eta_{j,k}(x)\right)\varphi_{j,l}(y), \end{aligned} \tag{6–46}$$

其中，$\eta_{j,k}(x) = 2^j x - k + M_1$.

表 6–3 不同分辨率水平下，全混合边值问题 (6–42) 和 (6–43) 的小波解之均方误差 $ErrSQ$ 与 CPU 耗时.

Table 6–3 The averaged square error and the used CPU time of the wavelet solution at different resolution levels for the completely mixed boundary value problem (6–42) and (6–43).

j, resolution level	$ErrSQ$	CPU time (sec.)
3	8.61×10^{-09}	0.59
4	1.56×10^{-10}	0.73
5	2.62×10^{-12}	1.02
6	4.14×10^{-14}	2.98

将小波逼近 (6–46) 及相关边界值代入方程 (6–42)，以 $H_{j,k}(x)\varphi_{j,l}(x)$ ($k = 0, 1, 2, ..., 2^j$，$l = 1, 2, ..., 2^j - 1$) 为权函数，由小波伽辽金方法可得：

$$\mathbf{A}^T rvec(\mathbf{U}) = -\widetilde{\mathbf{A}}^T\mathbf{u} - \mathbf{B}^T rvec(\mathbf{V}) \tag{6–47}$$

其中：

$$\begin{cases} \mathbf{A} = \widetilde{\mathbf{A}}_\mathbf{2} \otimes \mathbf{A_0} + \widetilde{\mathbf{A}}_\mathbf{0} \otimes \mathbf{A_2}, \\ \widetilde{\mathbf{A}} = \widetilde{\mathbf{A}}_\mathbf{2} \otimes \mathbf{a_0} + \widetilde{\mathbf{A}}_\mathbf{0} \otimes \mathbf{a_2}, \\ \mathbf{B} = \mathbf{B_2} \otimes \mathbf{A_0} + \mathbf{B_0} \otimes \mathbf{A_2}, \end{cases} \tag{6–48}$$

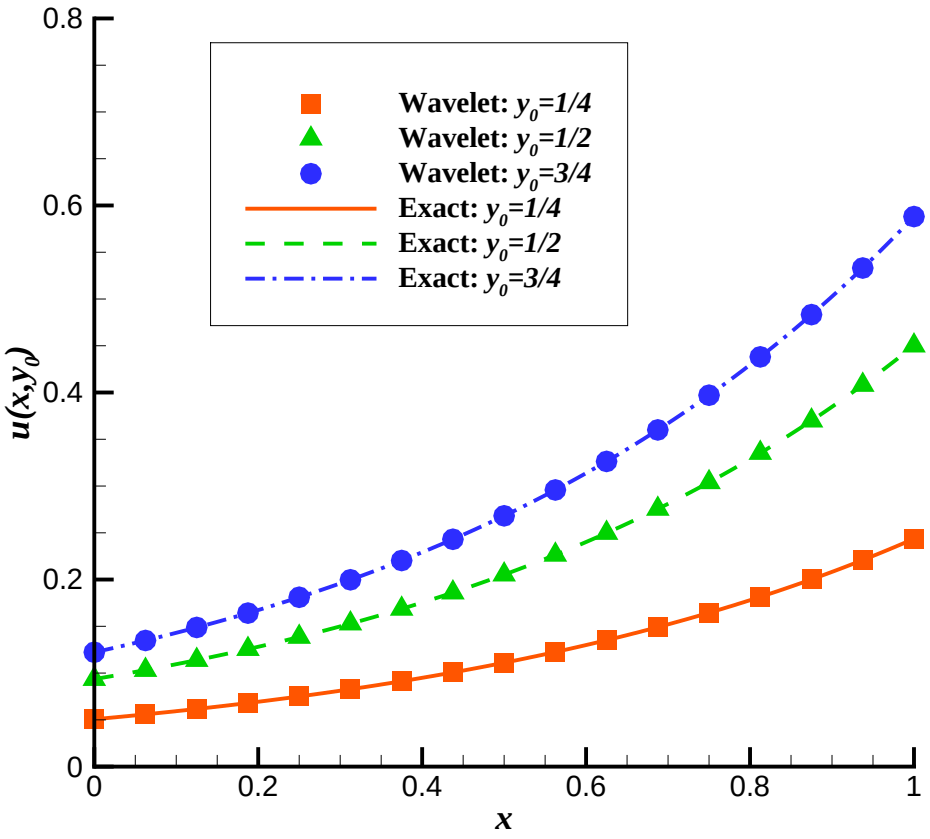

图 6–3 分辨率水平 $j = 4$ 时，全混合边值问题 (6–42) 和 (6–43) 的小波解与精确解的截面曲线之对比.

Fig. 6–3 Comparison of section curves of the wavelet solution at the resolution level $j = 4$ with the exact solution for the completely mixed boundary value problem (6–42) and (6–43). Lines: exact solution; square symbols: wavelet solution at $y_0 = 1/4$; delta symbols: wavelet solution at $y_0 = 1/2$; circle symbols: wavelet solution at $y_0 = 3/4$.

其中，系数矩阵 $\widetilde{\mathbf{A}}_{\mathbf{n}}$, $\mathbf{A}_{\mathbf{n}}$ 定义如下：

$$\begin{cases} \widetilde{\mathbf{A}}_{\mathbf{n}} = \left\{ a_{kl} = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}^n H_{j,k}(x)}{\mathrm{d}x^n} H_{j,l}(x)\mathrm{d}x \right\}_{k,\,l=0}^{k,\,l=2^j}, \\ \mathbf{A}_{\mathbf{n}} = \left\{ a_{kl} = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}^n \varphi_{j,k}(y)}{\mathrm{d}y^n} \varphi_{j,l}(y)\mathrm{d}y \right\}_{k,\,l=1}^{k,\,l=2^j-1}, \end{cases} \tag{6–49}$$

系数矩阵 $\mathbf{B_n}$ 和行向量 $\mathbf{a_n}$ 定义为:

$$\begin{cases} \mathbf{a_n} = \left\{ a_l = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}^n \varphi_{j,2^j}(y)}{\mathrm{d}y^n} \varphi_{j,l}(y) \mathrm{d}y \right\}_{l=1}^{l=2^j-1}, \\ \mathbf{B_n} = \left\{ b_{kl} = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}^n \varphi\left(\eta_{j,k}(x)\right)}{\mathrm{d}x^n} H_{j,l}(x) \mathrm{d}x \right\}_{k=2^j+1,\quad l=0}^{k=2^j-1+M_1,\ l=2^j}, \end{cases} \tag{6–50}$$

矩阵 $\mathbf{U}, \mathbf{V}$ 和列向量 $\mathbf{u}$ 定义如下:

$$\begin{cases} \mathbf{U} = \left\{ u_{kl} = u\left(\dfrac{k}{2^j}, \dfrac{l}{2^j}\right) \right\}_{k,\,l=0}^{k,\,l=2^j}, \\ \mathbf{V} = \left\{ v_{kl} = \left(\dfrac{k}{2^j} - 1\right) \nu_1\left(\dfrac{l}{2^j}\right) \right\}_{k=2^j+1,\quad l=1}^{k=2^j-1+M_1,\ l=2^j}, \\ \mathbf{u} = \left\{ u_k = \mu_1\left(\dfrac{k}{2^j}\right) \right\}_{k=0}^{k=2^j}. \end{cases} \tag{6–51}$$

通过求解线性方程组 (6–47)，可得混合边值问题 (6–42) 和 (6–43) 的解. 图 6–3 给出了分辨率水平 $j = 4$ 时，全混合偏微分方程边值问题 (6–42) 和 (6–43) 的小波解与精确解在 $y = 1/4, y = 1/2$ 及 $y = 3/4$ 处截面曲线之对比，可见二者吻合得非常好. 该二维边值问题是一个极具代表性的混合边值问题，它同时包含 Dirichlet 边界条件、Neumann 边界条件及 Robin 边界条件，这说明本章给出的非齐次边界条件处理方法对全混合的边界条件也是适用的. 表 6–3 进一步表明：不同分辨率水平下，本章所给出的方法同样可以在很短的 CPU 时间内获得二维混合边值问题高精度的解，这进一步说明了本章所给出的非齐次边界条件的小波处理方法之有效性与潜力.

6.4　本章小结

非齐次边界条件的处理，在小波同伦分析方法以及普通的小波方法中是一个非常重要的问题，但目前的文献中并未给出一般性的小波处理方法. 本章针对科学与工程中常见的三大类非齐次边界条件，即 Dirichlet 边界条件、Neumann 边界条件和 Robin 边界条件，以及混合型边界条件，在王记增等人的基础上，充分利用广义 Coiflet 小波之特性，给出了一套利用小波处理的一般方法.

不同类型的边值问题实例计算与结果结果分析充分说明：本章所给出的非齐次边界条件之小波处理方法具有许多显著的特点和优势.

(1) 普遍适用性. 这套方法不仅适用于各类单一的非齐次边界条件，而且适用于复杂的混合型边界条件.

(2) 高效性. 这套方法能在保证较高精度的同时实现快速求解.

(3) 便捷性与实用性. 本章给出的处理方法在理论和算法上都具有较强的系统性和规范性，这大大降低了应用难度，使小波同伦分析方法更加便捷与实用.

这套方法的给出，进一步完善了小波同伦分析方法的理论体系. 它不仅为小波同伦分析方法扫清了边界条件处理上的障碍，给小波同伦分析方法的理论与应用带来新的发展契机，同时也拓展了普通小波方法的适用范围.

第七章　广义小波伽辽金方法

在利用同伦分析方法求解非线性边值问题的过程中，常常会遇到变系数非线性微分方程，如流体力学中最经典的粘性圆球绕流问题 [62, 131]、结构力学中变截面梁的非线性屈曲问题 [41, 132, 133] 等等. 为了求解这些变系数非线性微分方程，通常都需要选取变系数线性微分算子作为辅助线性算子. 然而，变系数线性微分算子往往对应着复杂的通解，甚至其通解无法用初等函数精确表达，致使传统同伦分析方法中解表达原则很难满足甚至无法满足. 毫无疑问，这对于传统同伦分析方法而言是一个极大的困难与限制.

另一方面，对于本论文提出的小波同伦分析方法而言，变系数的微分方程常常导致复杂连接系数. 遗憾的是，由于具有紧支性的小波没有解析表达式，而且其导数具有高频震荡的性质，故在连接系数的计算中传统的数值积分方法均失效. 虽然小波领域的很多学者在连接系数的计算方面做了大量的工作，并且发展了一些高精度的计算方法，但这些方法仅能用于计算几类特殊的连接系数，对于一般形式的连接系数，至今没有通用的算法. 因此，变系数微分方程边值问题的求解，对于本论文中提出的小波同伦分析方法以及传统的小波伽辽金方法而言，同样是一个巨大的挑战.

为了解决这个问题，本章从微分方程及小波逼近本身出发，提出了若干定理，并在这些定理的基础上，发展出了广义小波伽辽金方法 (generalized wavelet-Galerkin method). 广义小波伽辽金方法不仅囊括了传统的小波伽辽金方法，而且最为重要的是，在广义小波伽辽金方法中，可完全避免复杂连接系数的计算. 这极大地拓展了小波同伦分析方法以及传统小波伽辽金方法的适用范围.

本章中，首先结合范例对复杂连接系数问题做进一步的阐述. 然后给出基本定理并加以证明，并在基本定理的基础上介绍广义小波伽辽金方法的基本思想与算法. 最后，结合几个不同类型的算例对广义小波伽辽金方法的有效性及其优势进行分析.

7.1 问题的进一步阐述

自 1988 年 Daubechies [90] 提出正交、紧支型小波以来，小波方法在微分方程的求解与应用中得到了迅速的发展. 尤其是小波伽辽金方法 [27–31]，由于它具有很好的收敛性和稳定性，故在理论和应用上均受到最广泛的关注 [99–101]. 遗憾的是，虽然具有正交性和紧支性的小波，如 Daubechies 小波 [20, 90, 92]、Coiflet 小波 [93, 134] 和广义 Coiflet 小波 [112, 115] 等在微分方程求解中具有非常显著的优势，但它们都没有解析表达式，而且其导数均具有高频震荡性. 这导致了小波伽辽金方法中一个不可回避的问题，即连接系数的计算问题 [100, 116, 135].

为了解决这个问题，小波领域的学者们做了大量的工作. 1996 年，Chen 等 [116] 从正交紧支撑小波的构造 [136, 137] 中受到启发，针对 Daubechies 小波提出了一套连接系数的高精度计算方法，该方法成功解决了一系列连接系数的计算问题. 2007 年，Zhang 等 [138] 纠正了文献 [116] 中的一些错误，并发展了一套更加清晰和完整的算法. 2001 年，王记增 [112] 针对广义 Coiflet 小波构造了简单连接系数的计算方法. 然而，这些方法都仅仅解决了部分特殊连接系数的计算问题，对于一般形式连接系数的计算并不通用.

对于一般的变系数微分方程的边值问题，连接系数的计算变得非常困难，甚至于无法计算. 下面通过简单的例子进行说明. 考虑区间 $[0,1]$ 上的一个包含变系数项 $\sin(x)\frac{\mathrm{d}^n u(x)}{\mathrm{d}x^n}$ 的微分方程，其中 $\sin(x)$ 即所谓的变系数，而 $u(x)$ 则是待求解的函数. 利用多分辨分析的理论，将函数 $u(x) \in L^2[0,1]$ 展开为：

$$u(x) \approx \sum_{k=0}^{2^j} \mu_k \varphi_{j,k}(x), \tag{7–1}$$

其中 μ_k $(k = 0, 1, 2, ..., 2^j)$ 为待求系数. 为了利用小波方法求解原方程，将小波逼近 (7–1) 代回原方程，则它包含下面的项：

$$\sin(x)\frac{\mathrm{d}^n u(x)}{\mathrm{d}x^n} \approx \sum_{k=0}^{2^j} \mu_k \sin(x)\frac{\mathrm{d}^n \varphi_{j,k}(x)}{\mathrm{d}x^n}. \tag{7–2}$$

因此，使用小波伽辽金方法时，需要计算下面的连接系数：

$$\int_0^1 \sin(x)\frac{\mathrm{d}^n \varphi_{j,k}(x)}{\mathrm{d}x^n}\varphi_{j,l}(x)\mathrm{d}x, \tag{7–3}$$

其中 $k,\ l=0,1,2,...,2^j$.

显然，用现有的方法计算上述连接系数是非常困难甚至是不可能的，尤其是当 $\sin(x)$ 被替换为任意的函数 $a(x)$ 时，目前尚无通用的算法. 而另一方面，由于形如 (7–3) 的连接系数依赖于系数函数 $a(x)$，就算存在好的算法，也需要对不同的方程分别计算不同的连接系数. 因此，在实际应用中，若能克服这种依赖于系数函数的连接系数，即所需要计算的连接系数仅依赖于小波基函数及其导数，则算法会变得更加高效与实用.

当然，可以进一步把系数函数 $\sin(x)$ 用小波展开：

$$\sin(x)\approx\sum_{k=0}^{2^j}\alpha_k\varphi_{j,k}(x), \tag{7–4}$$

其中 $\alpha_k=\int_0^1\sin(x)\varphi_{j,k}(x)\mathrm{d}x$，$k=0,1,2,...,2^j$，则 $\sin(x)\frac{\mathrm{d}^n u(x)}{\mathrm{d}x^n}$ 可展开为：

$$\sin(x)\frac{\mathrm{d}^n u(x)}{\mathrm{d}x^n}\approx\sum_{k=0}^{2^j}\sum_{l=0}^{2^j}\mu_k\alpha_l\frac{\mathrm{d}^n\varphi_{j,k}(x)}{\mathrm{d}x^n}\varphi_{j,l}(x). \tag{7–5}$$

这样，需要计算的连接系数就不再依赖于具体的微分方程了. 然而，计算下面的连接系数仍然会消耗大量的时间：

$$\Gamma_{k,l,m}^{j,n}=\int_0^1\frac{\mathrm{d}^n\varphi_{j,k}(x)}{\mathrm{d}x^n}\varphi_{j,l}(x)\varphi_{j,m}(x)\mathrm{d}x, \tag{7–6}$$

其中 $k,\ l,\ m=0,1,2,...,2^j$. 而且，这种多次完全展开的形式会使项数大量增加，从而严重影响计算效率. 正因为如此，本论文中，称形如 (7–3) 和 (7–6) 的积分为**复杂连接系数 (complicated connection coefficient)**.

上述问题严重限制了小波同伦分析方法及传统小波伽辽金方法在变系数微分方程求解中的应用. 因而，本章的目的是发展一种新的小波伽辽金方法. 它应具备如下的优势：

(1) 能完全避免计算上述提到的复杂连接系数；

(2) 所有需要计算的连接系数均独立于待求解的微分方程，从而保证算法的求解效率，并且能适用于各种类型的变系数微分方程；

(3) 能很方便地推广到高维边值问题.

基于上述考虑，本章发展出了广义小波伽辽金方法.

7.2 基本定理

定理 7.1 设 I 为有界开区间，n 为正整数，$f(x)\in C^n(I)$ 且 $u(x)\in C^n(I)$，则在区间 I 上下式成立：

$$f(x)\frac{\mathrm{d}^n u(x)}{\mathrm{d}x^n}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\frac{\mathrm{d}^{n-k}}{\mathrm{d}x^{n-k}}\left[\frac{\mathrm{d}^k f(x)}{\mathrm{d}x^k}u(x)\right], \tag{7–7}$$

其中，任意函数 $g(x)\in C(I)$ 的零阶导数定义为函数本身，即：

$$\frac{\mathrm{d}^0 g(x)}{\mathrm{d}x^0}\triangleq g(x). \tag{7–8}$$

证明 由于 n 为正整数，故要证明上述定理，相当于对任意的函数 $f(x),u(x)\in C^n(I)$ 证明以下关于正整数 n 的命题：

$$S(n):f(x)\frac{\mathrm{d}^n u(x)}{\mathrm{d}x^n}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\frac{\mathrm{d}^{n-k}}{\mathrm{d}x^{n-k}}\left[\frac{\mathrm{d}^k f(x)}{\mathrm{d}x^k}u(x)\right].$$

本论文中采用数学归纳法进行证明.

归纳奠基：当 $n=1$ 时，对任意的函数 $f(x),u(x)\in C^1(I)$，有：

$$\begin{aligned}S(1):f(x)\frac{\mathrm{d}u(x)}{\mathrm{d}x}&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[f(x)u(x)\right]-\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}u(x),\\&=\sum_{k=0}^{1}(-1)^k\binom{1}{k}\frac{\mathrm{d}^{1-k}}{\mathrm{d}x^{1-k}}\left[\frac{\mathrm{d}^k f(x)}{\mathrm{d}x^k}u(x)\right],\end{aligned}$$

即命题 $S(1)$ 为真.

归纳递推：假设当 $n=k$ 时，命题 $S(k)$ 对任意函数 $f(x),u(x)\in C^k(I)$ 成立，即：

$$S(k):f(x)\frac{\mathrm{d}^k u(x)}{\mathrm{d}x^k}=\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}\frac{\mathrm{d}^{k-i}}{\mathrm{d}x^{k-i}}\left[\frac{\mathrm{d}^i f(x)}{\mathrm{d}x^i}u(x)\right].$$

那么，对任意的函数 $f(x),u(x)\in C^{k+1}(I)$，显然有 $\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\in C^k(I)$ 和 $\frac{\mathrm{d}^k f(x)}{\mathrm{d}x^k}\in$

$C^1(I)$. 因此，

$$\begin{aligned}
f(x)\frac{\mathrm{d}^{k+1}u(x)}{\mathrm{d}x^{k+1}} &= f(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{\mathrm{d}^k u(x)}{\mathrm{d}x^k}\right] \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[f(x)\frac{\mathrm{d}^k u(x)}{\mathrm{d}x^k}\right] - \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}^k u(x)}{\mathrm{d}x^k} \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left\{\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}\frac{\mathrm{d}^{k-i}}{\mathrm{d}x^{k-i}}\left[\frac{\mathrm{d}^i f(x)}{\mathrm{d}x^i}u(x)\right]\right\} \\
&\quad - \sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}\frac{\mathrm{d}^{k-i}}{\mathrm{d}x^{k-i}}\left[\frac{\mathrm{d}^i}{\mathrm{d}x^i}\left(\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\right)u(x)\right].
\end{aligned}$$

由归纳假设，得:

$$\begin{aligned}
f(x)\frac{\mathrm{d}^{k+1}u(x)}{\mathrm{d}x^{k+1}} &= \sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}\frac{\mathrm{d}^{k+1-i}}{\mathrm{d}x^{k+1-i}}\left[\frac{\mathrm{d}^i f(x)}{\mathrm{d}x^i}u(x)\right] \\
&\quad - \sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}\frac{\mathrm{d}^{k-i}}{\mathrm{d}x^{k-i}}\left[\frac{\mathrm{d}^{i+1}f(x)}{\mathrm{d}x^{i+1}}\,u(x)\right] \\
&= \sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}\frac{\mathrm{d}^{k+1-i}}{\mathrm{d}x^{k+1-i}}\left[\frac{\mathrm{d}^i f(x)}{\mathrm{d}x^i}u(x)\right] \\
&\quad + \sum_{j=1}^{k+1}(-1)^j\binom{k}{j-1}\frac{\mathrm{d}^{k+1-j}}{\mathrm{d}x^{k+1-j}}\left[\frac{\mathrm{d}^j f(x)}{\mathrm{d}x^j}\,u(x)\right] \\
&= (-1)^0\binom{k}{0}\frac{\mathrm{d}^{k+1}}{\mathrm{d}x^{k+1}}\left[\frac{\mathrm{d}^0 f(x)}{\mathrm{d}x^0}u(x)\right] + (-1)^{k+1}\binom{k}{k}\frac{\mathrm{d}^0}{\mathrm{d}x^0}\left[\frac{\mathrm{d}^{k+1}f(x)}{\mathrm{d}x^{k+1}}\,u(x)\right] \\
&\quad + \sum_{i=1}^{k}(-1)^i\left[\binom{k}{i} + \binom{k}{i-1}\right]\frac{\mathrm{d}^{k+1-i}}{\mathrm{d}x^{k+1-i}}\left[\frac{\mathrm{d}^i f(x)}{\mathrm{d}x^i}u(x)\right].
\end{aligned}$$

根据组合数基本理论，等式 $\binom{k+1}{0} = \binom{k}{0} = \binom{k+1}{k+1} = \binom{k}{k} = 1$ 和 $\binom{k}{i} + \binom{k}{i-1} = \binom{k+1}{i}$ 成立. 由此可得:

$$f(x)\frac{\mathrm{d}^{k+1}u(x)}{\mathrm{d}x^{k+1}} = \sum_{i=0}^{k+1}(-1)^i\binom{k+1}{i}\frac{\mathrm{d}^{k+1-i}}{\mathrm{d}x^{k+1-i}}\left[\frac{\mathrm{d}^i f(x)}{\mathrm{d}x^i}u(x)\right],$$

这意味着命题 $S(k+1)$ 也为真.

因此，对于任意给定的正整数 k，递推关系 $S(k) \Longrightarrow S(k+1)$ 始终成立. 考虑到命题 $S(1)$ 为真，故对于任意的正整数 n，命题 $S(n)$ 均成立. 证毕.

定理 7.2 设 I 为有界开区间，$a_n(x) \in C^n(I)$ 和 $r(x)$ 均为已知函数，则线性常微分方程

$$\sum_{n=0}^{N} a_n(x) \frac{\mathrm{d}^n u(x)}{\mathrm{d}x^n} = r(x), \quad x \in I \tag{7–9}$$

可等价转换为:

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{\mathrm{d}^n \left(b_n(x) u(x)\right)}{\mathrm{d}x^n} = r(x), \quad x \in I, \tag{7–10}$$

其中，

$$b_n(x) = \sum_{r=n}^{N} (-1)^{r-n} \binom{r}{n} \frac{\mathrm{d}^{r-n} a_r(x)}{\mathrm{d}x^{r-n}}. \tag{7–11}$$

证明 根据 **定理 7.1**，对每个函数 $a_n(x) \in C^n(I)$ $(n = 0, 1, 2, ...N)$，均有:

$$\begin{aligned} a_n(x) \frac{\mathrm{d}^n u(x)}{\mathrm{d}x^n} &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \frac{\mathrm{d}^{n-k}}{\mathrm{d}x^{n-k}} \left[\frac{\mathrm{d}^k a_n(x)}{\mathrm{d}x^k} u(x) \right] \\ &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k} \left[\frac{\mathrm{d}^{n-k} a_n(x)}{\mathrm{d}x^{n-k}} u(x) \right]. \end{aligned}$$

因此，

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{N} a_n(x) \frac{\mathrm{d}^n u(x)}{\mathrm{d}x^n} &= \sum_{n=0}^{N} \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k} \left[\frac{\mathrm{d}^{n-k} a_n(x)}{\mathrm{d}x^{n-k}} u(x) \right] \\ &= \sum_{k=0}^{N} \sum_{n=k}^{N} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k} \left[\frac{\mathrm{d}^{n-k} a_n(x)}{\mathrm{d}x^{n-k}} u(x) \right]. \end{aligned}$$

将右端的求和指标 n 替换为 r，k 替换为 n ，则:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{N} a_n(x) \frac{\mathrm{d}^n u(x)}{\mathrm{d}x^n} &= \sum_{n=0}^{N} \sum_{r=n}^{N} (-1)^{r-n} \binom{r}{n} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} \left[\frac{\mathrm{d}^{r-n} a_r(x)}{\mathrm{d}x^{r-n}} u(x) \right] \\ &= \sum_{n=0}^{N} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} \left\{ \left[\sum_{r=n}^{N} (-1)^{r-n} \binom{r}{n} \frac{\mathrm{d}^{r-n} a_r(x)}{\mathrm{d}x^{r-n}} \right] u(x) \right\}. \end{aligned}$$

证毕.

定理 7.3 设 Ω 为有界开区域，$f(x,y) \in C^{m,n}(\Omega)$ [1]且 $u(x,y) \in C^{m+n}(\Omega)$，则在区域 Ω 上下式成立：

$$f(x,y)\frac{\partial^{m+n}u(x,y)}{\partial x^m \partial y^n} = \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}(-1)^{i+j}\binom{m}{i}\binom{n}{j}\frac{\partial^{(m-i)+(n-j)}}{\partial x^{m-i}\partial y^{n-j}}\left[\frac{\partial^{i+j}f(x,y)}{\partial x^i \partial y^j}u(x,y)\right], \tag{7–12}$$

其中，零阶偏导算子定义如下：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^{m+0}g(x,y)}{\partial x^m \partial y^0} \triangleq \dfrac{\partial^m g(x,y)}{\partial x^m}, \\ \dfrac{\partial^{0+n}g(x,y)}{\partial x^0 \partial y^n} \triangleq \dfrac{\partial^n g(x,y)}{\partial y^n}, \\ \dfrac{\partial^{0+0}g(x,y)}{\partial x^0 \partial y^0} \triangleq g(x,y). \end{cases} \tag{7–13}$$

证明 令 $v(x,y) = \frac{\partial^n u(x,y)}{\partial y^n}$，则由 **定理 7.1**可导出：

$$\begin{aligned} f(x,y)\frac{\partial^{m+n}u(x,y)}{\partial x^m \partial y^n} &= f(x,y)\frac{\partial^m v(x,y)}{\partial x^m} \\ &= \sum_{i=0}^{m}(-1)^i\binom{m}{i}\frac{\partial^{m-i}}{\partial x^{m-i}}\left[\frac{\partial^i f(x,y)}{\partial x^i}v(x,y)\right]. \end{aligned} \tag{7–14}$$

进一步地，令 $g_i(x,y) = \frac{\partial^i f(x,y)}{\partial x^i}$，则：

$$\begin{aligned} \frac{\partial^i f(x,y)}{\partial x^i}v(x,y) &= g_i(x,y)\frac{\partial^n u(x,y)}{\partial y^n} \\ &= \sum_{j=0}^{n}(-1)^j\binom{n}{j}\frac{\partial^{n-j}}{\partial y^{n-j}}\left[\frac{\partial^j g_i(x,y)}{\partial y^j}u(x,y)\right]. \end{aligned} \tag{7–15}$$

将 (7–15) 代入 (7–14)，可得：

$$\begin{aligned} f(x,y)\frac{\partial^{m+n}u(x,y)}{\partial x^m \partial y^n} &= \sum_{i=0}^{m}(-1)^i\binom{m}{i}\frac{\partial^{m-i}}{\partial x^{m-i}}\left\{\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\binom{n}{j}\frac{\partial^{n-j}}{\partial y^{n-j}}\left[\frac{\partial^j g_i(x,y)}{\partial y^j}u(x,y)\right]\right\} \\ &= \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}(-1)^{i+j}\binom{m}{i}\binom{n}{j}\frac{\partial^{(m-i)+(n-j)}}{\partial x^{m-i}\partial y^{n-j}}\left[\frac{\partial^{i+j}f(x,y)}{\partial x^i \partial y^j}u(x,y)\right]. \end{aligned}$$

证毕.

[1]符号说明：$C^{m,n}(\Omega)$ 表示在开区域 Ω 上对变量 x 和 y 分别 m 次和 n 次连续可导的函数构成的空间.

定理 7.4 设 Ω 为有界开区间，$a_{m,n}(x,y) \in C^{m,n}(\Omega)$ 和 $r(x,y)$ 均为已知函数，则偏微分方程

$$\sum_{m=0}^{M}\sum_{n=0}^{N} a_{m,n}(x,y)\frac{\partial^{m+n}u(x,y)}{\partial x^m \partial y^n} = r(x,y), \quad (x,y) \in \Omega \tag{7–16}$$

可等价转换为:

$$\sum_{m=0}^{M}\sum_{n=0}^{N} \frac{\partial^{m+n}\left(b_{m,n}(x,y)u(x,y)\right)}{\partial x^m \partial y^n} = r(x,y), \quad (x,y) \in \Omega, \tag{7–17}$$

其中，

$$b_{m,n}(x,y) = \sum_{r=m}^{M}\sum_{s=n}^{N} (-1)^{(r-m)+(s-n)} \binom{r}{m}\binom{s}{n} \frac{\partial^{(r-m)+(s-n)} a_{r,s}(x,y)}{\partial x^{r-m}\partial y^{s-n}}. \tag{7–18}$$

证明 根据**定理 7.3**，对任意的函数 $a_{m,n}(x,y) \in C^{m,n}(\Omega)$ $(m = 0,1,2,...M$，$n = 0,1,2,...N)$，有:

$$\begin{aligned}
&a_{m,n}(x,y)\frac{\partial^{m+n}u(x,y)}{\partial x^m \partial y^n} \\
&\quad = \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} (-1)^{i+j}\binom{m}{i}\binom{n}{j}\frac{\partial^{(m-i)+(n-j)}}{\partial x^{m-i}\partial y^{n-j}}\left[\frac{\partial^{i+j}a_{m,n}(x,y)}{\partial x^i \partial y^j}u(x,y)\right] \\
&\quad = \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} (-1)^{(m-i)+(n-j)}\binom{m}{i}\binom{n}{j}\frac{\partial^{i+j}}{\partial x^i \partial y^j}\left[\frac{\partial^{(m-i)+(n-j)}a_{m,n}(x,y)}{\partial x^{m-i}\partial y^{n-j}}u(x,y)\right],
\end{aligned}$$

其中，算子 $\frac{\partial^{m+0}}{\partial x^m \partial y^0}$，$\frac{\partial^{0+n}}{\partial x^0 \partial y^n}$ 和 $\frac{\partial^{0+0}}{\partial x^0 \partial y^0}$ 定义为 (7–13). 因此，

$$\begin{aligned}
&\sum_{m=0}^{M}\sum_{n=0}^{N} a_{m,n}(x,y)\frac{\partial^{m+n}u(x,y)}{\partial x^m \partial y^n} \\
&\quad = \sum_{m=0}^{M}\sum_{n=0}^{N}\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} (-1)^{m-i+n-j}\binom{m}{i}\binom{n}{j}\frac{\partial^{i+j}}{\partial x^i \partial y^j}\left[\frac{\partial^{m-i+n-j}a_{m,n}(x,y)}{\partial x^{m-i}\partial y^{n-j}}u(x,y)\right] \\
&\quad = \sum_{i=0}^{M}\sum_{j=0}^{N}\sum_{m=i}^{M}\sum_{n=j}^{N} (-1)^{m-i+n-j}\binom{m}{i}\binom{n}{j}\frac{\partial^{i+j}}{\partial x^i \partial y^j}\left[\frac{\partial^{m-i+n-j}a_{m,n}(x,y)}{\partial x^{m-i}\partial y^{n-j}}u(x,y)\right].
\end{aligned}$$

将右端的求和指标 m 改写为 r，n 改写为 s，i 改写为 m，j 改写为 n，可得：

$$\begin{aligned}
&\sum_{m=0}^{M}\sum_{n=0}^{N} a_{m,n}(x,y)\frac{\partial^{m+n}u(x,y)}{\partial x^m\partial y^n}\\
&=\sum_{m=0}^{M}\sum_{n=0}^{N}\sum_{r=m}^{M}\sum_{s=n}^{N}(-1)^{r-m+s-n}\binom{r}{m}\binom{s}{n}\frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m\partial y^n}\left[\frac{\partial^{r-m+s-n}a_{r,s}(x,y)}{\partial x^{r-m}\partial y^{s-n}}u(x,y)\right]\\
&=\sum_{m=0}^{M}\sum_{n=0}^{N}\frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m\partial y^n}\left\{\sum_{r=m}^{M}\sum_{s=n}^{N}\left[(-1)^{r-m+s-n}\binom{r}{m}\binom{s}{n}\frac{\partial^{r-m+s-n}a_{r,s}(x,y)}{\partial x^{r-m}\partial y^{s-n}}\right]u(x,y)\right\}.
\end{aligned}$$

证毕.

7.3　广义小波伽辽金方法

基于上述的基本定理，本章发展出广义小波伽辽金方法 (generalized wavelet-Galerkin method). 不失一般性，考虑线性常微分方程 (7–9) 和偏微分方程 (7–16). 若直接采用传统的小波伽辽金法进行求解，则当 $a_n(x)$ 和 $a_{m,n}(x,y)$ 为非常系数时会导出复杂连接系数，以至于很难求解，甚至无法求解. 然而，根据基本定理，这两个方程可分别等价转换为 (7–10) 和 (7–17). 这样，若分别对函数 $b_n(x)u(x)$ 及 $b_{m,n}(x,y)u(x,y)$ 进行小波逼近，则可完全避免复杂连接系数的计算，从而很方便地得到方程 (7–10) 和 (7–17) 的解. 这就是广义小波伽辽金方法的基本思想.

7.3.1　变系数线性常微分方程边值问题的统一解法

考虑区间 $[0,1]$ 上一般形式的变系数常微分方程的边值问题：

$$\sum_{n=0}^{N}\frac{\mathrm{d}^n\left(b_n(x)u(x)\right)}{\mathrm{d}x^n}=r(x),\quad 0<x<1, \tag{7–19}$$

其中，$r(x)$ 和 $b_n(x)$ 为已知函数，并且方程满足若干边界条件，使得解的存在唯一性得到保证.

与传统的小波伽辽金方法不同的是，广义小波伽辽金方法并不直接对未知函数 $u(x)$ 作小波展开，而是将函数 $b_n(x)u(x)$ 作为一个整体进行展开. 而根据边界条件的不同，基函数采用第六章介绍的方法进行修正. 不失一般性，将函

数 $b_n(x)u(x)$ 用小波基函数展开为：

$$f_n(x)u(x) \approx P^j\left[f_n(x)u(x)\right] = \sum_{k=0}^{2^j} f_n\left(\frac{k}{2^j}\right) u\left(\frac{k}{2^j}\right) \varphi_{j,k}(x) \tag{7–20}$$

其中，$n = 1, 2, ..., N$. 函数 $r(x)$ 可展开为：

$$r(x) \approx P^j\left[r(x)\right] = \sum_{k=0}^{2^j} r\left(\frac{k}{2^j}\right) \varphi_{j,k}(x). \tag{7–21}$$

将 (7–20) 和 (7–21) 代入方程 (7–19)，得：

$$\sum_{n=0}^{N}\sum_{k=0}^{2^j} b_n\left(\frac{k}{2^j}\right) u\left(\frac{k}{2^j}\right) \frac{\mathrm{d}^n\varphi_{j,k}(x)}{\mathrm{d}x^n} = \sum_{k=0}^{2^j} r\left(\frac{k}{2^j}\right) \varphi_{j,k}(x). \tag{7–22}$$

利用小波伽辽金方法，在 (7–22) 式左右两边分别乘以 $\varphi_{j,l}(x)$ ($l = 0, 1, 2, ..., 2^j$ ，或者当函数 $u(x)$ 在 $x = 0$ 和 $x = 1$ 处的值给出时取 $l = 1, 2, ..., 2^j - 1$)，并在区间 $[0, 1]$ 上积分，得：

$$\sum_{n=0}^{N} \mathbf{A_n}^T \left(\mathbf{b_n} \circ \mathbf{u}\right) = \mathbf{A_0}^T \mathbf{r}, \tag{7–23}$$

其中，$\mathbf{b_n} \circ \mathbf{u}$ 表示向量 $\mathbf{b_n}$ 和 $\mathbf{u}$ 的 Hadamard / Schur 乘积，具体含义由第二章**定义 2.2** 给出，相关的矩阵和向量定义如下：

$$\begin{cases} \mathbf{A_n} = \left\{ a_{kl} = \Gamma_{k,l}^{j,n} = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}^n\varphi_{j,k}(x)}{\mathrm{d}x^n}\varphi_{j,l}(x)\mathrm{d}x \right\}_{k,\,l=0}^{k,\,l=2^j}, \\ \mathbf{b_n} = \left\{ b_k = b_n\left(\frac{k}{2^j}\right) \right\}_{k=0}^{k=2^j}, \\ \mathbf{u} = \left\{ u_k = u\left(\frac{k}{2^j}\right) \right\}_{k=0}^{k=2^j}, \\ \mathbf{r} = \left\{ r_k = r\left(\frac{k}{2^j}\right) \right\}_{k=0}^{k=2^j}. \end{cases} \tag{7–24}$$

利用第二章给出的 **性质 2.2**，方程 (7–23) 可改写为：

$$\left[\sum_{n=0}^{N} \mathbf{A_n}^T \odot \mathbf{b_n}\right] \mathbf{u} = \mathbf{A_0}^T \mathbf{r}, \tag{7–25}$$

其中，$\mathbf{A_n}^T \odot \mathbf{b_n}$ 表示矩阵 $\mathbf{A_n}^T$ 与向量 $\mathbf{b_n}$ 的列点乘积，具体含义由第二章的**定义 2.3** 给出.

在实际应用中，上式需要根据边界条件的不同作一定的修正，但其基本形式不变，故小波伽辽金方程 (7–25) 具有普遍意义. 该方程表明：在广义小波伽辽金方法中，连接系数与系数函数 $b_n(x)$ 无关. 因此，不管求解什么类型的常微分方程，都只需要计算最简单的连接系数，即：

$$\Gamma_{k,l}^{j,n} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}^n \varphi_{j,k}(x)}{\mathrm{d}x^n} \varphi_{j,l}(x) \mathrm{d}x, \tag{7–26}$$

而这种类型的连接系数是很容易计算的. 特别地，在广义小波伽辽金方法中，由于连接系数完全独立于方程，故在实际应用中，可以通过建立连接系数数据库实现数据共享. 这大大规范和简化了广义小波伽辽金方法的计算流程，同时也显著提高了计算效率. 另外，根据**定理 7.2**，任何一个线性常微分方程 (7–9) 均可转化为 (7–19) 的形式. 因此，广义小波伽辽金方法具有普遍适用性. 关于广义小波同伦分析方法的这些优势，下文还将结合计算实例作进一步的分析.

7.3.2　变系数线性偏微分方程边值问题的统一解法

考虑区域 $[0,1]^2$ 上一般形式的变系数偏微分方程的边值问题：

$$\sum_{m=0}^{M}\sum_{n=0}^{N} \frac{\partial^{m+n}\left(b_{m,n}(x,y)u(x,y)\right)}{\partial x^m \partial y^n} = r(x,y),\ 0 < x, y < 1, \tag{7–27}$$

其中，$r(x,y)$ 和 $b_{m,n}(x,y)$ 为已知函数，并且方程满足若干边界条件，使得解的存在唯一性得到保证.

对函数 $b_{m,n}(x,y)u(x,y)$ 及 $r(x,y)$ 进行小波逼近，同时考虑边界条件，则类似地可以得到如下的小波方程：

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{2^j}\sum_{l=0}^{2^j}\left[u\left(\frac{k}{2^j},\frac{k}{2^j}\right)\sum_{m=0}^{M}\sum_{n=0}^{N} b_{m,n}\left(\frac{k}{2^j},\frac{l}{2^j}\right)\frac{\mathrm{d}^m\varphi_{j,k}(x)}{\mathrm{d}x^m}\frac{\mathrm{d}^n\varphi_{j,l}(y)}{\mathrm{d}y^n}\right] \\ = \sum_{k=0}^{2^j}\sum_{l=0}^{2^j} r\left(\frac{k}{2^j},\frac{l}{2^j}\right)\varphi_{j,k}(x)\varphi_{j,l}(y),\end{aligned} \tag{7–28}$$

由广义小波伽辽金方法，得：

$$\sum_{m=0}^{M}\sum_{n=0}^{N} \mathbf{A_m}^T \left(\mathbf{B_{mn}} \circ \mathbf{U}\right) \mathbf{A_n} = \mathbf{A_0}^T \mathbf{R} \mathbf{A_0}, \tag{7–29}$$

其中，$\mathbf{B_{mn}} \circ \mathbf{U}$ 表示矩阵 $\mathbf{B_{mn}}$ 和 $\mathbf{U}$ 的 Hadamard / Schur 乘积，具体含义由第二章**定义 2.2** 给出，相关的矩阵定义如下：

$$\begin{cases} \mathbf{A_n} = \left\{ a_{kl} = \Gamma_{k,l}^{j,n} = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}^n \varphi_{j,k}(x)}{\mathrm{d}x^n} \varphi_{j,l}(x) \mathrm{d}x \right\}_{k,\,l=0}^{k,\,l=2^j}, \\ \mathbf{B_{mn}} = \left\{ b_{kl} = b_{m,n}\left(\frac{k}{2^j}, \frac{l}{2^j} \right) \right\}_{k,\,l=0}^{k,\,l=2^j}, \\ \mathbf{U} = \left\{ u_{kl} = u\left(\frac{k}{2^j}, \frac{l}{2^j} \right) \right\}_{k,\,l=0}^{k,\,l=2^j}, \\ \mathbf{R} = \left\{ r_{kl} = r\left(\frac{k}{2^j}, \frac{l}{2^j} \right) \right\}_{k,\,l=0}^{k,\,l=2^j}. \end{cases} \tag{7–30}$$

将左右两边按行拉直，即作用算子 $rvec(\cdot)$ (具体含义由第二章**定义 2.4**给出)，并利用第二章给出的**性质 2.1**∼ **性质 2.4**，可得如下的小波伽辽金方程：

$$\left[\sum_{m=0}^{M} \sum_{n=0}^{N} \left(\mathbf{A_m} \otimes \mathbf{A_n} \right)^T \odot rvec\left(\mathbf{B_{mn}} \right) \right] rvec\left(\mathbf{U} \right) = \left(\mathbf{A_0} \otimes \mathbf{A_0} \right)^T rvec\left(\mathbf{R} \right). \tag{7–31}$$

其中，$\mathbf{A_m} \otimes \mathbf{A_n}$ 表示矩阵 $\mathbf{A_m}$ 和 $\mathbf{A_n}$ 的 Kronecker 张量积，具体含义由第二章**定义 2.5** 给出，$\mathbf{A} \odot rvec\left(\mathbf{B_{mn}} \right)$ 表示矩阵 $\mathbf{A}$ 和矩阵 $\mathbf{B_{mn}}$ 的按行拉直向量 $rvec\left(\mathbf{B_{mn}} \right)$ 之间的列点乘积，具体含义由第二章**定义 2.3** 给出.

从以上方程可以看出，在偏微分方程边值问题的求解中，连接系数与系数函数 $b_{m,n}(x,y)$ 无关. 也就是说，需要计算的连接系数完全独立于所要求解的偏微分方程. 另外，根据**定理 7.4**，任何一个偏微分方程 (7–16) 可等价转换为 (7–27). 因此，广义小波伽辽金方法对偏微分方程边值问题的求解具有普遍适用性.

此外，对于更高维度的偏微分方程边值问题，也可以类似地利用广义小波伽辽金方法进行求解.

7.4　计算实例

为了验证本章所提出的广义小波伽辽金方法之有效性与计算效率，本节求解了若干含有不同形式变系数的常微分方程与偏微分方程的边值问题. 为了便于对比，下面给出的计算结果均在同一台计算机上得到，其相关配置为：DELL Inspiron 3847, Intel(R) Core(TM) i5-4460 CPU@ 3.20GHz.

7.4.1　多项式系数常微分方程实例

考虑下面的含有多项式系数的常微分方程：

$$x^2\frac{\mathrm{d}^2u(x)}{\mathrm{d}x^2}+x\frac{\mathrm{d}u(x)}{\mathrm{d}x}+\left[\left(\frac{9\pi}{2}x\right)^2-\frac{1}{4}\right]u(x)=0, \tag{7–32}$$

及边界条件：

$$u(0)=0,\ u(1)=1. \tag{7–33}$$

其精确解为：

$$u(x)=\frac{\sin\left(\frac{9\pi x}{2}\right)}{\sqrt{x}}. \tag{7–34}$$

根据**定理 7.2**，方程 (7–32) 可等价转换为：

$$\frac{\mathrm{d}^2\left(b_2(x)u(x)\right)}{\mathrm{d}x^2}+\frac{\mathrm{d}\left(b_1(x)u(x)\right)}{\mathrm{d}x}+b_0(x)u(x)=0, \tag{7–35}$$

其中，

$$\begin{cases} b_0(x)=\dfrac{3}{4}\left(27\pi^2x^2+1\right), \\ b_1(x)=-3x, \\ b_2(x)=x^2. \end{cases} \tag{7–36}$$

考虑到 $u(0)=0$ 且 $x=0$ 为系数函数 $b_1(x)$ 的一阶零点和 $b_2(x)$ 的二阶零点，故：

$$\begin{cases} b_0(x)u(x)|_{x=0}=0, \\ b_1(x)u(x)|_{x=0}=0,\ \dfrac{\mathrm{d}\left(b_1(x)u(x)\right)}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=0}=0, \\ b_2(x)u(x)|_{x=0}=0,\ \dfrac{\mathrm{d}\left(b_2(x)u(x)\right)}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=0}=0,\ \dfrac{\mathrm{d}^2\left(b_2(x)u(x)\right)}{\mathrm{d}x^2}\Big|_{x=0}=0. \end{cases} \tag{7–37}$$

根据第六章给出的边界条件处理方法，需将 $b_1(x)u(x)$ 和 $b_2(x)u(x)$ 的基函数分别修正为 $\tilde{\varphi}_{j,k}(x)$ 和 $\tilde{\tilde{\varphi}}_{j,k}(x)$，其定义如下：

$$\begin{cases} \tilde{\varphi}_{j,k}(x)=\varphi_{j,k}(x)|_{p_{0,1,k}\to 0}, \\ \tilde{\tilde{\varphi}}_{j,k}(x)=\varphi_{j,k}(x)|_{p_{0,1,k}\to 0,\ p_{0,2,k}\to 0}. \end{cases} \tag{7–38}$$

将这些修正代入小波方程 (7–22)，得：

$$\sum_{k=0}^{2^j} u\left(\frac{k}{2^j}\right)\left[b_2\left(\frac{k}{2^j}\right)\frac{\mathrm{d}^2\tilde{\varphi}_{j,k}(x)}{\mathrm{d}x^2}+b_1\left(\frac{k}{2^j}\right)\frac{\mathrm{d}\tilde{\varphi}_{j,k}(x)}{\mathrm{d}x}+b_0\left(\frac{k}{2^j}\right)\varphi_{j,k}(x)\right]=0,$$

其中边界条件的嵌入方法是直接将 $u\left(0/2^j\right)=0$ 和 $u\left(2^j/2^j\right)=1$ 代入上述方程.

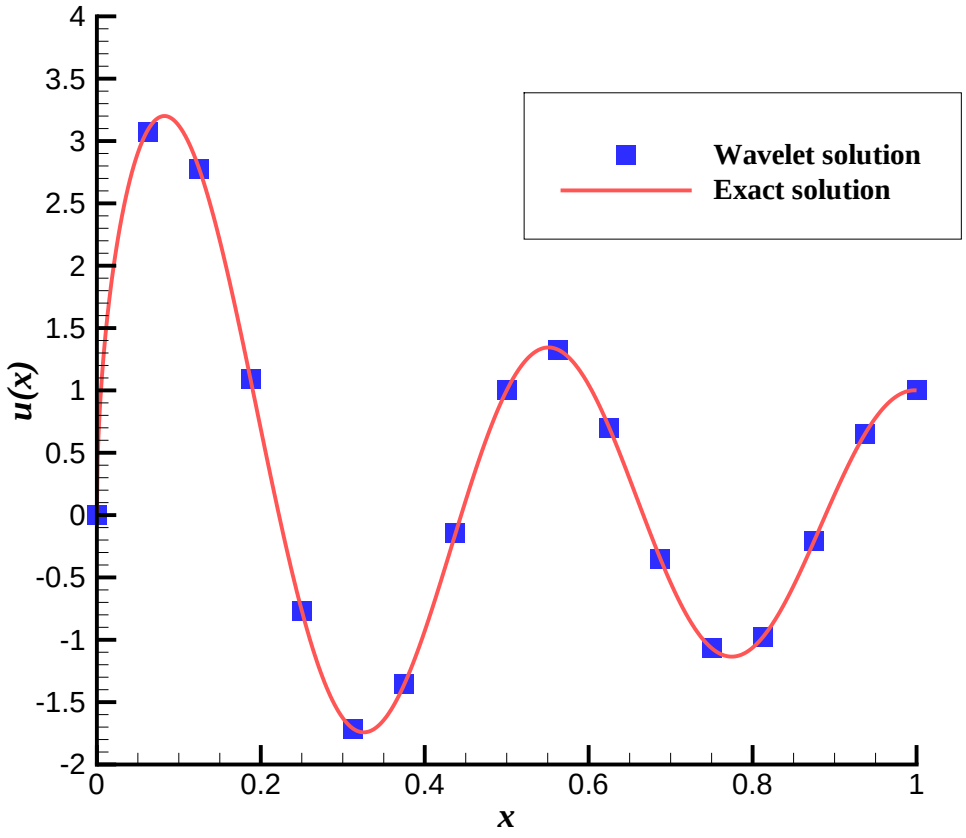

图 7–1 分辨率水平 $j=4$ 时，含有多项式系数的边值问题 (7–32) 和 (7–33) 的小波解与精确解之对比.

Fig. 7–1 Comparison of the wavelet solution at the resolution level $j=4$ with the exact solution for the boundary value problem with polynomial coefficients governed by Eqs. (7–32) and (7–33). Solid line: exact solution; square symbols: wavelet solution.

以 $\varphi_{j,l}(x)$ $(l=1,2,...,2^j-1)$ 为权函数，则由广义小波伽辽金方法可得下

面的线性代数方程：

$$\left[\sum_{n=0}^{2} \mathbf{A_n}^T \odot \mathbf{b_n}\right] \mathbf{u} = 0, \tag{7–39}$$

其中，

$$\begin{cases} \mathbf{A_0} = \left\{ a_{kl} = \Gamma_{k,l}^{j,0} = \displaystyle\int_0^1 \varphi_{j,k}(x)\varphi_{j,l}(x)\mathrm{d}x \right\}_{k=0,\ l=1}^{k=2^j,\ l=2^j-1}, \\ \mathbf{A_1} = \left\{ a_{kl} = \tilde{\Gamma}_{k,l}^{j,1} = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}\tilde{\varphi}_{j,k}(x)}{\mathrm{d}x}\varphi_{j,l}(x)\mathrm{d}x \right\}_{k=0,\ l=1}^{k=2^j,\ l=2^j-1}, \\ \mathbf{A_2} = \left\{ a_{kl} = \tilde{\tilde{\Gamma}}_{k,l}^{j,2} = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}^2\tilde{\tilde{\varphi}}_{j,k}(x)}{\mathrm{d}x^2}\varphi_{j,l}(x)\mathrm{d}x \right\}_{k=0,\ l=1}^{k=2^j,\ l=2^j-1}, \\ \mathbf{b_n} = \left\{ b_k = b_n\left(\dfrac{k}{2^j}\right) \right\}_{k=0}^{k=2^j}, \\ \mathbf{u} = \left\{ u_k = u\left(\dfrac{k}{2^j}\right) \right\}_{k=0}^{k=2^j}. \end{cases} \tag{7–40}$$

将左端与已知量 $u(0/2^j)$ 和 $u(2^j/2^j)$ 相关的部分分离出来，可求出线性代数方程 (7–39) 的解.

分辨率水平 $j=4$ 时，含有多项式系数的边值问题 (7–32) 和 (7–33) 的小波解与精确解之对比如图 7–1所示. 显然，小波解与精确解吻合得很好，这说明了本章所提出的广义小波伽辽金方法的有效性. 更重要的是，从这个例子的求解过程中，可以明显地看到该方法的优势：求解过程中所需要计算的连接系数与微分方程 (7–32) 中的变系数 x^2、x 和 $\left(\frac{9\pi}{2}x\right)^2 - \frac{1}{4}$ 完全分离，也就是说，连接系数完全独立于微分方程本身. 因此，在广义小波伽辽金方法的框架下，可以很方便地建立通用的连接系数数据库，从而大大提高计算效率与方法的适用性. 例如，当分辨率水平 $j=4$ 时，求解该方程仅消耗 0.36 秒的 CPU 时间；即便是分辨率水平 $j=6$ 时，也仅仅消耗 0.96 秒. 由此可见，广义小波伽辽金方法具有很高的计算效率.

7.4.2　混合系数常微分方程实例

考虑下面的含有混合系数的常微分方程：

$$x^2\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2} + \sin\pi x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + \mathrm{e}^x u = \left(\mathrm{e}^x + \pi\cos\pi x - \pi^2x^2\right)\sin\pi x, \tag{7–41}$$

及边界条件：

$$u(0) = u(1) = 0. \tag{7–42}$$

其精确解为：

$$u(x) = \sin \pi x. \tag{7–43}$$

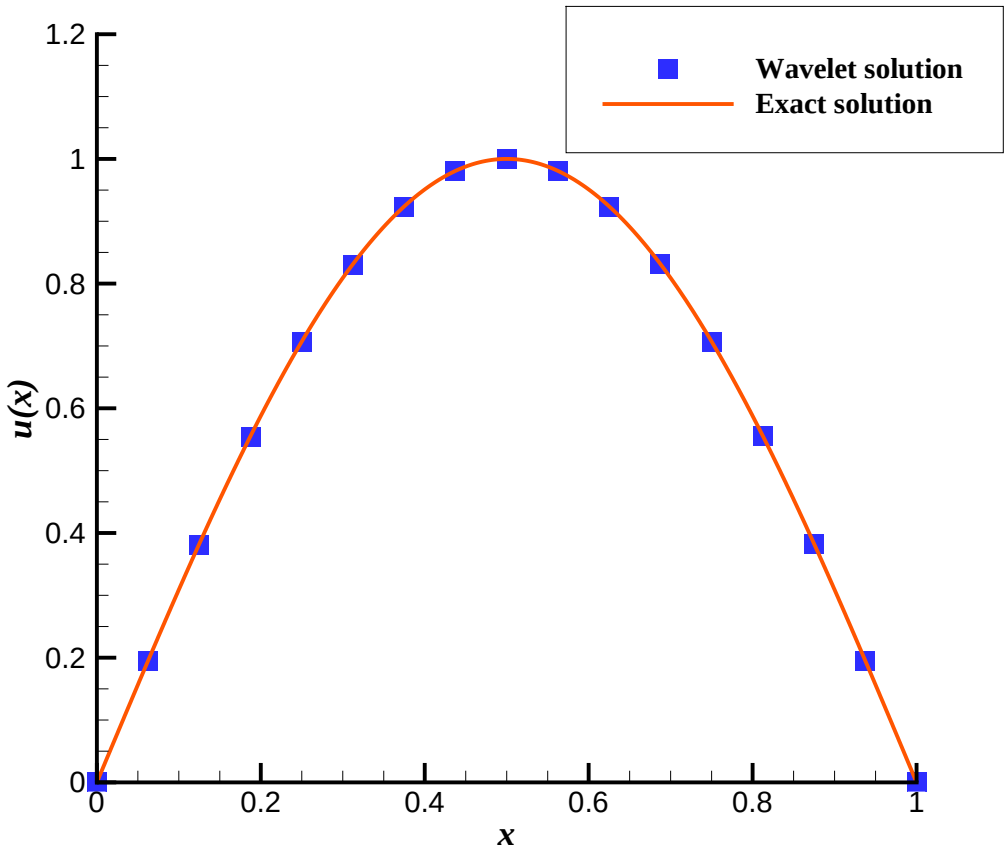

图 7–2 分辨率水平 $j = 4$ 时，含有混合系数的边值问题 (7–41) 和 (7–42) 的小波解与精确解之对比.

Fig. 7–2 Comparison of the wavelet solution at the resolution level $j = 4$ with the exact solution for the boundary value problem with mixed coefficients governed by Eqs. (7–41) and (7–42). Solid line: exact solution; square symbols: wavelet solution.

根据**定理 7.2**，方程 (7–41) 可等价转换为：

$$\frac{\mathrm{d}^2\left(b_2(x)u(x)\right)}{\mathrm{d}x^2}+\frac{\mathrm{d}\left(b_1(x)u(x)\right)}{\mathrm{d}x}+b_0(x)u(x)=r(x), \tag{7–44}$$

其中，

$$\begin{cases} b_0(x)=\mathrm{e}^x-\pi\cos\pi x+2, \\ b_1(x)=\sin\pi x-4x, \\ b_2(x)=x^2, \\ r(x)=\left(\mathrm{e}^x+\pi\cos\pi x-\pi^2x^2\right)\sin\pi x. \end{cases} \tag{7–45}$$

考虑到 $u(0)=0$ 且 $x=0$ 为系数函数 $b_1(x)$ 的一阶零点和 $b_2(x)$ 的二阶零点，故将 $b_1(x)u(x)$ 和 $b_2(x)u(x)$ 的小波基函数分别修正为 $\tilde{\varphi}_{j,k}(x)$ 和 $\tilde{\tilde{\varphi}}_{j,k}(x)$，其定义同 (7–38). 类似于第一个算例，边界条件 (7–42) 可直接代入到函数 $b_0(x)u(x)$, $b_1(x)u(x)$ 和 $b_2(x)u(x)$ 的小波逼近表达式中.

类似地，将修正后的表达式代入方程 (7–44) 中，然后求解小波伽辽金方程 (7–25)，可得原边值问题的解. 图 7–2 给出了分辨率水平 $j=4$ 时小波解与精确解的对比. 由图可见：小波解与精确解吻合得很好. 这进一步说明了广义小波伽辽金方法的有效性.

7.4.3　特殊函数系数常微分方程实例

考虑下面以特殊函数为系数的常微分方程：

$$\Gamma(x+1)\frac{\mathrm{d}^2u(x)}{\mathrm{d}x^2}+\left[\Gamma(x+1)+\Gamma'(x+1)\right]\frac{\mathrm{d}u(x)}{\mathrm{d}x}=-\Gamma'(x+1)-\Gamma''(x+1), \tag{7–46}$$

及边界条件：

$$u(0)=0,\ u(1)=0. \tag{7–47}$$

其精确解为：

$$u(x)=\ln\frac{1}{\Gamma(x+1)}, \tag{7–48}$$

其中 $\Gamma(x)$ 为 Gamma 函数，即：

$$\Gamma(x)=\int_0^{+\infty}\xi^{x-1}\mathrm{e}^{-\xi}d\xi. \tag{7–49}$$

根据**定理 7.2**，方程 (7–46) 可等价转换为：

$$\frac{\mathrm{d}^2\left(b_2(x)u(x)\right)}{\mathrm{d}x^2}+\frac{\mathrm{d}\left(b_1(x)u(x)\right)}{\mathrm{d}x}+b_0(x)u(x)=r(x), \tag{7–50}$$

其中，

$$\begin{cases} b_0(x)=-\Gamma'(x+1), \\ b_1(x)=\Gamma(x+1)-\Gamma'(x+1), \\ b_2(x)=\Gamma(x+1), \\ r(x)=-\Gamma'(x+1)-\Gamma''(x+1). \end{cases} \tag{7–51}$$

表 7–1 不同分辨率水平下，以特殊函数为系数的边值问题 (7–46) 和 (7–47) 的小波解之均方误差 $ErrSQ$ 与 CPU 耗时.

Table 7–1 The averaged square error and the used CPU time of the wavelet solution at different resolution levels for the boundary value problem with special functions as coefficients governed by Eqs. (7–46) and (7–47).

j, resolution level	$ErrSQ$	CPU time (sec.)
3	2.33×10^{-09}	0.31
4	7.67×10^{-12}	0.37
5	1.92×10^{-14}	0.54
6	4.37×10^{-17}	0.95

对于这个问题，由于 $x=0$ 和 $x=1$ 都不是 $b_0(x)$、$b_1(x)$ 和 $b_2(x)$ 的零点，故直接采用 $\varphi_{j,k}(x)$ 作基函数. 而边界条件 (7–47) 的嵌入只需直接将端点的值 $u(0)=u(1)=0$ 代入函数 $b_0(x)u(x)$、$b_1(x)u(x)$ 和 $b_2(x)u(x)$ 的小波逼近表达式中即可. 将相关系数代入小波伽辽金方程 (7–25) 并求解之后即可得到原边值问题的解.

分辨率水平 $j=4$ 时的小波解与精确解的对比如图 7–3所示. 显然，小波解与精确解高度吻合. 这再次说明了广义小波伽辽金方法的有效性.

为了进一步的分析，定义均方误差 $ErrSQ$ 和误差分布 $E(x)$ 如下：

$$ErrSQ=\frac{1}{2^j+1}\sum_{k=0}^{2^j}\left[u_w(\frac{k}{2^j})-u_e(\frac{k}{2^j})\right]^2, \tag{7–52}$$

$$E(x) = \left|u_w(x) - u_e(x)\right|^2, \quad 0 < x < 1, \tag{7–53}$$

其中 $u_e(x)$ 和 $u_w(x)$ 分别代表精确解和小波解.

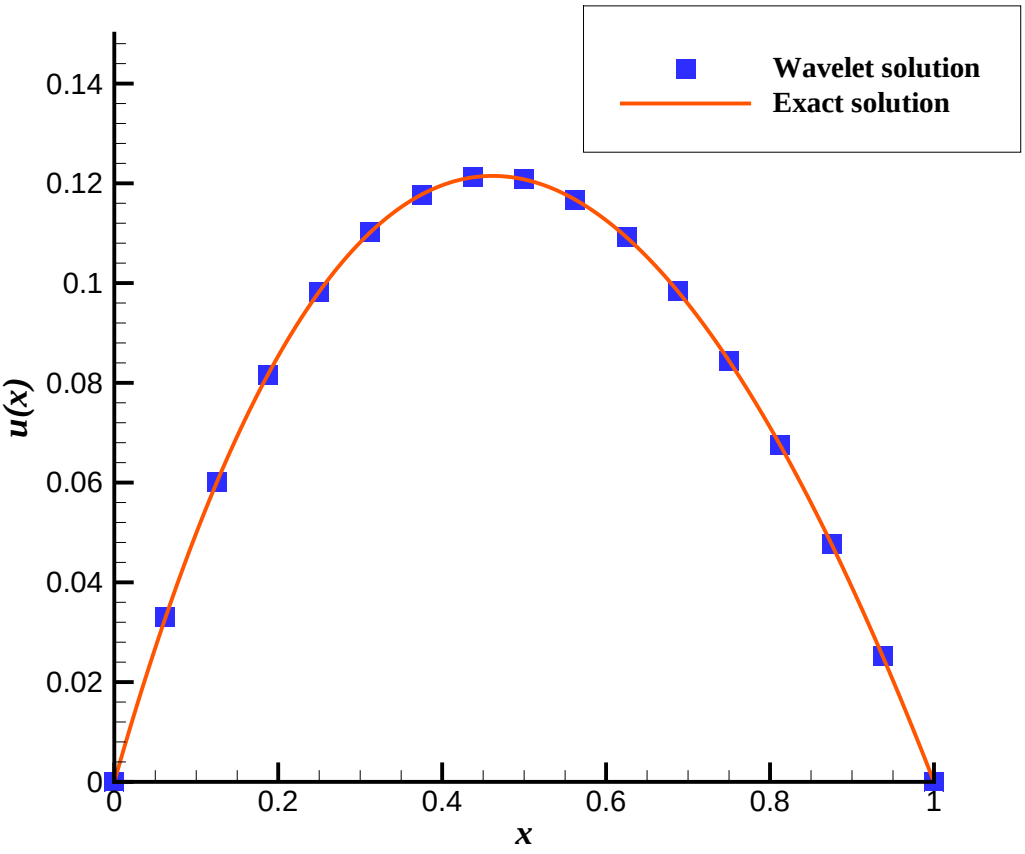

图 7–3 分辨率水平 $j = 4$ 时，以特殊函数为系数的边值问题 (7–46) 和 (7–47) 的小波解与精确解之对比.

Fig. 7–3 Comparison of the wavelet solution at the resolution level $j = 4$ with the exact solution for the boundary value problem with special functions as coefficients governed by Eqs. (7–46) and (7–47). Solid line: exact solution; square symbols: wavelet solution.

表 7–1 给出了不同分辨率水平下小波解的均方误差及相应的 CPU 耗时. 显然，本章提出的广义小波伽辽金方法具有较高的求解效率. 随着分辨率水平 j 从 3 提高到 6，小波解的精度显著提高，而 CPU 耗时则均在 1 秒以内. 当分辨率水平 $j = 6$，均方误差达到相当可观的数量级，即 10^{-17}. 分辨率水平 $j = 6$

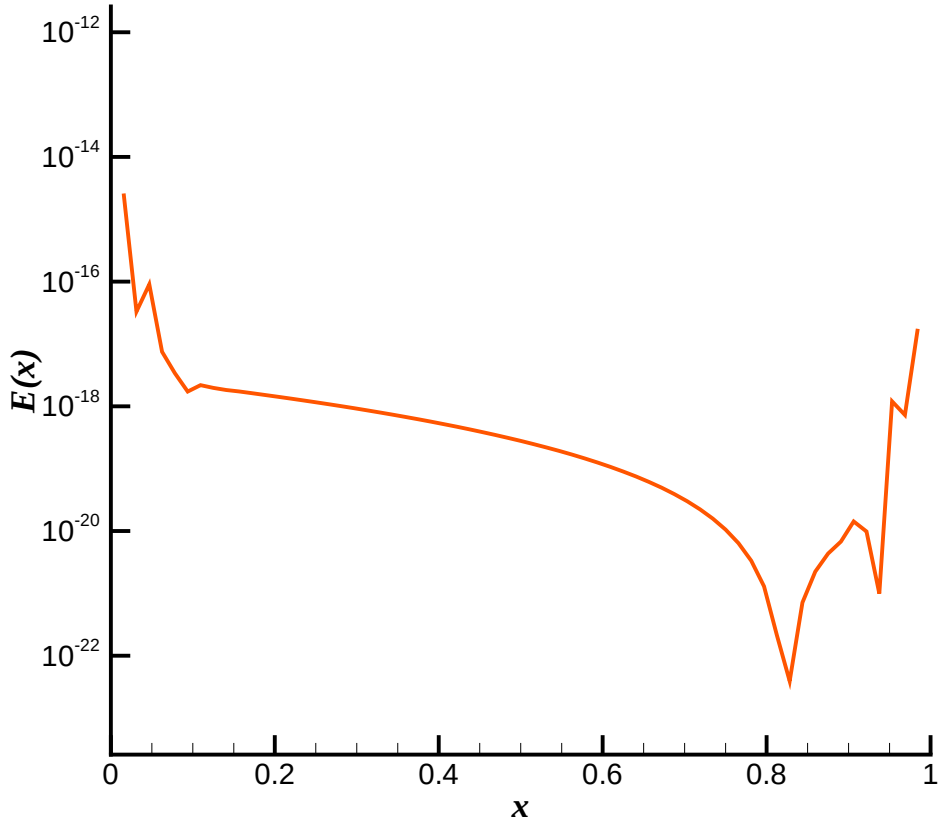

图 7–4 分辨率水平 $j = 6$ 时，以特殊函数为系数的边值问题 (7–46) 和 (7–47) 的小波解之误差分布.

Fig. 7–4 The error distribution of the wavelet solution at the resolution level $j = 6$ for the boundary value problem with special functions as coefficients governed by Eqs. (7–46) and (7–47). Solid line: exact solution; square symbols: wavelet solution.

时，该边值问题的小波解之误差分布函数如图 7–4 所示. 由图可见：在整个区间 $[0, 1]$ 上，几乎所有点的误差均在 10^{-15} 以下. 以上计算结果不仅说明了本章所提出的广义小波伽辽金方法之有效性，同时也验证了该方法具有很好的收敛性和较高的精度. 另外，广义小波伽辽金方法求解流程规范简洁，且连接系数不依赖于控制方程，因而具有普遍适用性，这进一步说明了广义小波伽辽金方法的优势和潜力.

7.4.4　变系数偏微分方程实例

最后，考虑一个变系数的偏微分方程：

$$\sqrt{x^2+y^2+1}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)+\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+1}}\left(x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}-2u\right)=0, \tag{7–54}$$

及边界条件：

$$\begin{cases} u(0,y)=\sqrt{1+y^2},\ u(1,y)=\sqrt{2+y^2}, \\ u(x,0)=\sqrt{1+x^2},\ u(x,1)=\sqrt{2+x^2}. \end{cases} \tag{7–55}$$

其精确解为：

$$u(x,y)=\sqrt{x^2+y^2+1}. \tag{7–56}$$

根据**定理 7.4**，方程 (7–54) 可等价转换为：

$$\frac{\partial^2\left(b_{20}u\right)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\left(b_{02}u\right)}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\left(b_{11}u\right)}{\partial x\partial y}+\frac{\partial\left(b_{10}u\right)}{\partial x}+\frac{\partial\left(b_{01}u\right)}{\partial y}+b_{00}u=0, \tag{7–57}$$

其中，

$$\begin{cases} b_{20}(x,y)=\sqrt{x^2+y^2+1}, \\ b_{02}(x,y)=\sqrt{x^2+y^2+1}, \\ b_{11}(x,y)=0, \\ b_{10}(x,y)=-\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+1}}, \\ b_{01}(x,y)=-\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2+1}}, \\ b_{00}(x,y)=-\dfrac{2}{\sqrt{x^2+y^2+1}} \end{cases} \tag{7–58}$$

对于这个问题，方程 (7–57) 可用小波逼近为：

$$\begin{aligned} &\sum_{k=0}^{2^j}\sum_{l=0}^{2^j}u\left(\frac{k}{2^j},\frac{l}{2^j}\right)\left[b_{20}\left(\frac{k}{2^j},\frac{l}{2^j}\right)\frac{\mathrm{d}^2\varphi_{j,k}(x)}{\mathrm{d}x^2}\varphi_{j,l}(y)+b_{02}\left(\frac{k}{2^j},\frac{l}{2^j}\right)\varphi_{j,k}(x)\frac{\mathrm{d}^2\varphi_{j,l}(y)}{\mathrm{d}y^2}\right] \\ &+\sum_{k=0}^{2^j}\sum_{l=0}^{2^j}u\left(\frac{k}{2^j},\frac{l}{2^j}\right)\left[b_{10}\left(\frac{k}{2^j},\frac{l}{2^j}\right)\frac{\mathrm{d}\varphi_{j,k}(y)}{\mathrm{d}x}\varphi_{j,l}(y)+b_{01}\left(\frac{k}{2^j},\frac{l}{2^j}\right)\varphi_{j,k}(x)\frac{\mathrm{d}\varphi_{j,l}(y)}{\mathrm{d}y}\right] \\ &+\sum_{k=0}^{2^j}\sum_{l=0}^{2^j}u\left(\frac{k}{2^j},\frac{l}{2^j}\right)b_{00}\left(\frac{k}{2^j},\frac{l}{2^j}\right)\varphi_{j,k}(x)\varphi_{j,l}(y)=0, \end{aligned} \tag{7–59}$$

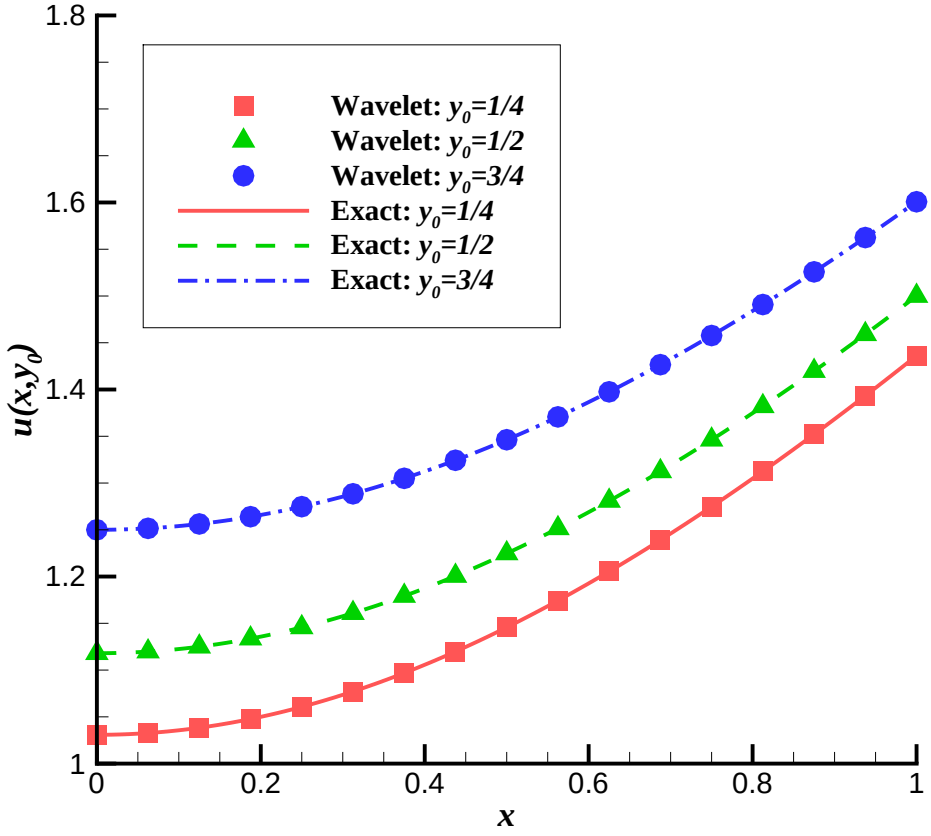

图 7–5 分辨率水平 $j = 4$ 时，变系数偏微分方程边值问题 (7–54) 和 (7–55) 的小波解与精确解的截面曲线之对比.

Fig. 7–5 Comparison of section curves of the wavelet solution at the resolution level $j = 4$ with the exact solution for the two-dimensional boundary value problem governed by Eqs. (7–54) and (7–55). Lines: exact solution; square symbols: wavelet solution at $y_0 = 1/4$; delta symbols: wavelet solution at $y_0 = 1/2$; circle symbols: wavelet solution at $y_0 = 3/4$.

边界条件 (7–55) 的嵌入方法是直接把

$$\begin{cases} u\left(\frac{k}{2^j},0\right)=\sqrt{1+\left(\frac{k}{2^j}\right)^2},\ u\left(\frac{k}{2^j},1\right)=\sqrt{2+\left(\frac{k}{2^j}\right)^2}, \\ u\left(0,\frac{l}{2^j}\right)=\sqrt{1+\left(\frac{l}{2^j}\right)^2},\ u\left(1,\frac{l}{2^j}\right)=\sqrt{2+\left(\frac{l}{2^j}\right)^2} \end{cases} \tag{7–60}$$

代入到 (7–59) 中.

由广义小波伽辽金方法，得:

$$\left[\sum_{m=0}^{2}\sum_{n=0}^{2-m}\left(\mathbf{A_m}\otimes\mathbf{A_n}\right)^T\odot rvec\left(\mathbf{B_{mn}}\right)\right]rvec\left(\mathbf{U}\right)=\mathbf{0}, \tag{7–61}$$

其中的相关矩阵由 (7–30) 式定义.

表 7–2 不同分辨率水平下，变系数偏微分方程边值问题 (7–54) 和 (7–55) 的小波解之均方误差 $ErrSQ$ 与 CPU 耗时.

Table 7–2 The averaged square error and the used CPU time of the wavelet solution at different resolution levels for the two-dimensional boundary value problem governed by Eqs. (7–54) and (7–55).

j, resolution level	$ErrSQ$	CPU time (sec.)
3	8.73×10^{-19}	0.36
4	7.48×10^{-19}	0.44
5	6.89×10^{-19}	0.74
6	6.60×10^{-19}	3.53

将方程组 (7–61) 左端与边界值相关的部分分离出来，并求解该方程，可得原边值问题的解. 图 7–5 分别给出了分辨率水平 $j=4$ 时，$y=1/4$、$y=1/2$ 和 $y=3/4$ 处小波解和精确解截面曲线之对比. 由表 7–2 可知，$j=4$ 时对应的均方误差已经达到 7.48×10^{-19} . 显然，由广义小波伽辽金方法得到的小波解与精确解高度吻合，表 7–2 进一步验证了该方法具有高精度、高效率的优点.

7.5　本章小结

科学与工程中常常会遇到变系数微分方程的求解，然而在小波同伦分析方法以及传统的小波伽辽金方法中，变系数的微分方程常常导致复杂连接系数，从而很大程度上限制了方法的适用范围. 针对这个问题，本章给出了一般性的解决方法.

本章在理论部分给出并证明了基本定理，在基本定理的基础上发展出广义小波伽辽金方法，并针对一般形式的变系数常微分方程和偏微分方程的边值问

题导出统一的小波伽辽金方程；在应用部分通过几个包含不同类型变系数的常微分方程与偏微分方程边值问题的求解，验证了广义小波伽辽金方法的有效性，并结合计算结果分析了其优势. 与传统的小波伽辽金方法相比，广义小波伽辽金方法完全克服了复杂连接系数的计算，并且求解过程中所需要计算的连接系数独立于微分方程的具体形式. 换句话说，不管新的微分方程包含何种形式、何种类型的变系数，都不需要计算新的连接系数. 因此，在广义小波伽辽金方法的框架内，可以很方便地建立通用的连接系数数据库，实现数据共享. 这不仅大大规范和简化了广义小波伽辽金方法的计算流程，而且显著提高了计算效率，并使该方法普遍适用于各种类型微分方程的求解. 特别是，将广义小波伽辽金方法运用于小波同伦分析方法，理论上可以用于求解任何类型的非线性边值问题.

另外，广义小波伽辽金方法很容易推广到高维边值问题. 实际上，广义小波伽辽金方程 (7–31) 可直接推广到 K 维边值问题，即：

$$\left[\sum_{n_1=0}^{N_1}\sum_{n_2=0}^{N_2}\cdots\sum_{n_K=0}^{N_K}\left(\bigotimes_{k=1}^{K}\mathbf{A}_{\mathbf{n_k}}\right)^T\odot rvec\left(\mathbf{B}_{\mathbf{n_1 n_2}\ldots\mathbf{n_K}}\right)\right]rvec\left(\mathbf{U}\right)$$
$$=\left(\bigotimes_{k=1}^{K}\mathbf{A_0}\right)^T rvec\left(\mathbf{R}\right), \tag{7–62}$$

其中 $\bigotimes_{k=1}^{K}\mathbf{A}_{\mathbf{n_k}}=\mathbf{A}_{\mathbf{n_1}}\otimes\mathbf{A}_{\mathbf{n_2}}\otimes\ldots\otimes\mathbf{A}_{\mathbf{n_K}}$，算子 $rvec(\cdot)$ 将一个 K 维矩阵逐维地拉直成列向量. 此外，本章提出的广义小波伽辽金方法不仅对广义 Coiflet 小波有效，而且可以直接运用到任意的具有插值性或者拟插值性的其他小波.

广义小波伽辽金方法是小波同伦分析方法理论的重要组成部分，它推广了传统的小波伽辽金方法，并大大扩展了小波同伦分析方法的适用范围.

第八章 结论与展望

8.1 工作总结

自然科学、工程实践乃至社会生活的各个领域均普遍存在各种各样的非线性问题，而这些问题中很多都可以归结为非线性微分方程边值问题的求解. 自 1992 年廖世俊 [19] 提出同伦分析方法以来，该方法凭借不依赖于小 (大) 物理参数、便捷的控制收敛方式以及可自由选取辅助线性算子与解表达等优势，在理论上得到了系统的发展，在实践中得到了广泛的应用.

同伦分析方法之所以具有强大的生命力和吸引力，最重要的原因就是其提出者、继承者及使用者始终站在发展的角度，不断对其进行改进、推广与完善. 时至今日，同伦分析方法已经形成一个完整的体系，但传统的同伦分析方法同样存在一些可进一步完善和拓展的空间，其中最重要的就是提高高阶形变方程右端项的计算效率、解除解表达原则之限制以及引进具有强适应性的基函数与相应的算法. 为了实现这些目的，本论文中结合同伦分析方法及现代小波理论，提出了一种新的非线性边值问题求解方法，即小波同伦分析方法，针对该方法理论和应用上的若干重要问题进行了讨论，并相应给出一般性的拓展和解决方法. 具体来说，本论文中所做的主要工作如下:

1. 首次将同伦分析方法与现代小波理论结合，提出了小波同伦分析方法，并通过一维和二维 Bratu 方程分别介绍了求解常、偏微分方程边值问题的小波同伦分析方法之基本思想与主要算法步骤. 作为应用指导，针对小波同伦分析方法中初始猜测解的选取问题，提出了边界匹配原则；针对线性算子的选取，提出了解存在原则和阶数匹配原则. 在偏微分方程边值问题的求解中，针对右端项中导数的计算问题，提出了基于截面曲线的快速算法. 计算结果分析表明本论文中提出的小波同伦分析方法不仅继承了传统同伦分析方法的主要优势，而且呈现出许多新的亮点:

   (1) 与传统的同伦分析方法一样，通过调节控制收敛参数，可以很方便地控制解的收敛，而且由于解的收敛情况对控制收敛参数的选取并不敏感，故可以较容易地选取合适的控制收敛参数;

(2) 小波同伦分析方法建立在多分辨分析基础之上，故通过调节分辨率水平可很方便地平衡计算效率与精度之间的关系；

(3) 与传统的同伦分析方法相比，小波同伦分析方法解除了解表达原则的限制，对不同的辅助线性算子具有更强的适应性，这主要体现为小波形式的解表达对不同线性算子的普遍适应性、不同线性算子下小波同伦解的快速收敛性及运算的高效性三大方面，这不仅使辅助线性算子的选取变得更加简单，而且使该方法在强非线性问题的求解上具备了更大的潜力；

(4) 与传统的同伦分析方法相比，小波同伦分析方法具有更高的求解效率，主要体现为能快速获得高精度的小波逼近和 CPU 耗时随着阶数的线性增长两个方面；

(5) 小波同伦迭代技术可显著加速解的收敛.

2. 介绍了一种运用小波同伦分析方法寻找多解的策略，即：通过引入可区分不同解支的参数，把原边值问题转化成一个含待定参变量的非线性边值问题，再分别对控制方程和边界条件构造同伦，利用小波同伦分析方法进行求解. 计算结果表明：在小波同伦分析方法中，通过构造含参变量边值问题的方法可以有效地寻找多解. 这进一步展示了小波同伦分析方法在求解非线性多解问题中的巨大潜力.

3. 针对非齐次边界条件的处理问题，给出了一套一般性的小波逼近方法，并针对科学与工程中最为常见的非齐次 Dirichlet 边界条件、Neumann 边界条件、Robin 边界条件以及混合边界条件，分别推导出相应的小波逼近. 通过不同类型的计算实例验证与结果分析，说明这套方法具有普适性、高效性、便捷性与实用性等优势. 这套方法的给出，进一步完善了小波同伦分析方法的理论体系. 它不仅为小波同伦分析方法扫清了边界条件处理上的障碍，给小波同伦分析方法的理论与应用带来新的发展契机，同时也拓展了普通小波方法的适用范围.

4. 为了克服因为变系数而导致的复杂连接系数，提出了广义小波伽辽金方法. 理论上，给出并证明了基本定理，并针对一般形式的变系数常微分方程和偏微分方程的边值问题导出了统一的小波伽辽金方程；应用上，通过几个包含不同类型变系数的常微分方程与偏微分方程边值问题的求解，

验证了广义小波伽辽金方法的有效性，并结合计算结果分析了其主要优势. 与传统的小波伽辽金方法相比，广义小波伽辽金方法完全避免了复杂连接系数的计算，并且在求解过程中所需要计算的连接系数独立于微分方程的具体形式. 因此，在广义小波伽辽金方法的框架内，可以很方便地建立通用的连接系数数据库，实现数据共享. 这不仅大大规范和简化了广义小波伽辽金方法的计算流程，而且显著提高了计算效率，并使该方法普遍适用于各种类型微分方程的求解. 特别是，将广义小波伽辽金方法运用于小波同伦分析方法，理论上可以用于求解任何类型的非线性边值问题. 另外，广义小波伽辽金方法可直接推广到高维边值问题及具有插值性或拟插值性的其他小波. 广义小波伽辽金方法的提出，是对传统的小波伽辽金方法的推广，并大大扩展了小波同伦分析方法的适用范围.

8.2 主要创新点

本论文的主要创新点如下:

1. 首次将同伦分析方法与现代前沿的数学理论——小波分析进行结合，提出一种求解非线性边值问题的一般性方法，即小波同伦分析方法;
2. 通过构造含参变量边值问题的方法，成功利用小波同伦分析方法寻找多解;
3. 针对偏微分方程边值问题中偏导数的计算问题，提出一种基于截面曲线的快速小波算法;
4. 针对常见的三大类非齐次边界条件及混合边界条件，给出一套用小波处理的一般性方法;
5. 提出并证明了若干基本定理，并在这些基本定理的基础上，发展出求解变系数微分方程的广义小波伽辽金方法.

8.3 研究展望

本论文主要结合同伦分析方法和现代小波理论，提出了求解非线性边值问题的小波同伦分析方法，并以一维和二维 Bratu 方程为示范性实例，介绍了小

波同伦分析方法在常微分方程、偏微分方程以及多解问题求解中的主要思想和基本算法步骤. 在拓展部分，针对非齐次边界条件问题，给出了一般性的小波处理方法；针对变系数微分方程的求解，提出了广义小波伽辽金方法. 基本的小波同伦分析方法及其拓展，共同构成了小波同伦分析方法的理论体系. 后续可进一步研究和完善的工作主要有:

1. 本论文侧重点在于理论和方法本身，所举的例子更多考虑的是验证方法本身的有效性与优势，没有太多结合实际工程应用. 因此，在后续的研究与应用中，可利用本论文提出的理论和方法解决更多科学与工程中的实际应用问题.

2. 对于偏微分方程的边值问题，本论文仅讨论了矩形区域上的问题，而没有讨论一般的不规则区域问题，而实际的工程应用中存在很多不规则区域的情形. 因此，在后续研究中，可将小波同伦分析方法向不规则区域上推广.

3. 对于边界条件问题，本论文仅涉及到线性边界条件的处理，在后续的研究中可尝试对非线性边界条件的研究.

4. 本论文中仅讨论和求解了边值问题，而未涉及初边值混合问题. 在后续的应用中，可结合一些初值问题求解的现代方法，将小波同伦分析方法发展为一种可直接处理复杂初边值混合问题的高效解法.

5. 本论文提出的小波同伦分析方法，以及作为其拓展的非齐次边界条件处理方法和广义小波伽辽金方法，都具有规范的理论与算法. 因此，在后续的研究中，可以考虑将整个体系进一步规范、发展与综合，开发小波同伦求解器.

6. 小波理论是一个很有潜力的数学研究方向，在后续的研究与应用中，可进一步开展新小波的研究.

参考文献

[1] Nicolis G. Introduction to nonlinear science[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1995: 1261–1262.

[2] Lam L. Introduction to nonlinear physics[M]. New York: Springer-Verlag, 1999.

[3] Mortensen R E. Nonlinear system theory: the Volterra/Wiener approach by Wilson J. Rugh[M]. Washington, D.C.: Johns Hopkins University Press, 1981: 412–414.

[4] Scott A C. The nonlinear universe: chaos, emergence, life[M]. New York: Springer Publishing Company, Incorporated, 2007.

[5] 杨万利, 王铁宁. 非线性动力学理论方法及应用 [M]. 北京: 国防工业出版社, 2007.

[6] 魏诺. 非线性科学基础与应用 [M]. 北京: 科学出版社, 2004.

[7] Vajravelu K, Van Gorder R. Nonlinear flow Phenomena and Homotopy Analysis[M]. New York: Springer, 2013.

[8] 楼森岳, 唐晓艳. 非线性数学物理方法 [M]. 北京: 科学出版社, 2006.

[9] Fadlun E, Verzicco R, Orlandi P, et al. Combined immersed-boundary finite-difference methods for three-dimensional complex flow simulations[J]. Journal of Computational Physics, 2000, 161(1):35–60.

[10] Zienkiewicz O C, Taylor R L. The finite element method for solid and structural mechanics[M]. Newcastle: Butterworth-heinemann, 2005.

[11] Versteeg H K, Malalasekera W. An introduction to computational fluid dynamics: the finite volume method[M]. New York: Pearson Education, 2007.

[12] Grilli S T, Skourup J, Svendsen I A. An efficient boundary element method for nonlinear water waves[J]. Engineering Analysis with Boundary Elements, 1989, 6(2):97–107.

[13] Eisenlohr P, Diehl M, Lebensohn R A, et al. A spectral method solution to crystal elasto-viscoplasticity at finite strains[J]. International Journal of Plasticity, 2013, 46:37–53.

[14] Kevorkian J, Cole J D. Perturbation methods in applied mathematics[M], Vol. 34. New York: Springer Science & Business Media, 2013.

[15] Nayfeh A H. Perturbation methods[M]. New York: John Wiley & Sons, 2008.

[16] Lyapunov A M. The general problem of the stability of motion[J]. International Journal of Control, 1992, 55(3):531–534.

[17] Karmishin A V, Zhukov A I, Kolosov V G, et al. Methods of dynamics calculation and testing for thin-walled structures[J]. Mashinostroyenie, Moscow, 1990.

[18] Adomian G. Solving frontier problems of physics: the decomposition method[M], Vol. 60. New York: Springer Science & Business Media, 2013.

[19] Liao S J. The proposed homotopy analysis technique for the solution of nonlinear problems[D]. Shanghai: Shanghai Jiao Tong University, 1992.

[20] Daubechies I. 小波十讲 [M]. 李建平, 杨万年, translation. 北京: 国防工业出版社, 2004.

[21] Ko J, Kurdila A J, Pilant M S. A class of finite element methods based on orthonormal, compactly supported wavelets[J]. Computational Mechanics, 1995, 16(4):235–244.

[22] Ma J X, Xue J J, Yang S J, et al. A study of the construction and application of a Daubechies wavelet-based beam element[J]. Finite Elements in Analysis and Design, 2003, 39(10):965–975.

[23] Han J G, Ren W X, Huang Y. A spline wavelet finite-element method in structural mechanics[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2006, 66(1):166–190.

[24] Bertoluzza S, Naldi G. A wavelet collocation method for the numerical solution of partial differential equations[J]. Applied and Computational Harmonic Analysis, 1996, 3(1):1–9.

[25] Vasilyev O V, Paolucci S. A dynamically adaptive multilevel wavelet collocation method for solving partial differential equations in a finite domain[J]. Journal of Computational Physics, 1996, 125(2):498–512.

[26] Vasilyev O V, Kevlahan N K R. An adaptive multilevel wavelet collocation method for elliptic problems[J]. Journal of Computational Physics, 2005, 206(2):412–431.

[27] Amaratunga K, Williams J R, Qian S, et al. Wavelet–Galerkin solutions for one-dimensional partial differential equations[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1994, 37(16):2703–2716.

[28] Avudainayagam A, Vani C. Wavelet–Galerkin method for integro–differential equations[J]. Applied Numerical Mathematics, 2000, 32(3):247–254.

[29] Wang J Z, Wang X M, Zhou Y H. A wavelet approach for active-passive vibration control of laminated plates[J]. Acta Mechanica Sinica, 2012, 28(2):520–531.

[30] Liu X J, Zhou Y H, Wang X M, et al. A wavelet method for solving a class of nonlinear boundary value problems[J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2013, 18(8):1939–1948.

[31] Zhang L, Wang J Z, Zhou Y H. Wavelet solution for large deflection bending problems of thin rectangular plates[J]. Archive of Applied Mechanics, 2015, 85(3):355–365.

[32] Hilton P J. An introduction to homotopy theory[M]. London and New York: Cambridge University Press, 1953: viii,237.

[33] Liao S J, Chwang A T. General boundary element method for non-linear problems[J]. International Journal for Numerical Methods in Fluids, 1996, 23(5):467–483.

[34] Liao S J. Boundary element method for general nonlinear differential operators[J]. Engineering Analysis with Boundary Elements, 1997, 20(2):91–99.

[35] Liao S J. Numerically solving non-linear problems by the homotopy analysis method[J]. Computational Mechanics, 1997, 20(6):530–540.

[36] 廖世俊. 同伦分析方法: 一种不依赖于小参数的非线性分析方法 [J]. 力学季刊, 1997(3):196–200.

[37] Liao S J. A kind of approximate solution technique which does not depend upon small parameters—II. An application in fluid mechanics[J]. International Journal of Non-Linear Mechanics, 1997, 32(5):815–822.

[38] Liao S J. Beyond perturbation: introduction to the homotopy analysis method[M]. Boca Raton: CRC Press, 2003.

[39] Liao S J. A new analytic algorithm of Lane–Emden type equations[J]. Applied Mathematics and Computation, 2003, 142(1):1–16.

[40] Liao S J. On the homotopy analysis method for nonlinear problems[J]. Applied Mathematics and Computation, 2004, 147(2):499–513.

[41] Liao S J. Homotopy analysis method in nonlinear differential equations[M]. New York: Springer-Verlag, 2011.

[42] Liao S J. Notes on the homotopy analysis method: some definitions and theorems[J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2009, 14(4):983–997.

[43] Molabahrami A, Khani F. The homotopy analysis method to solve the Burgers–Huxley equation[J]. Nonlinear Analysis: Real World Applications, 2009, 10(2):589–600.

[44] Turkyilmazoglu M. A note on the homotopy analysis method[J]. Applied Mathematics Letters, 2010, 23(10):1226–1230.

[45] Turkyilmazoglu M. Some issues on HPM and HAM methods: a convergence scheme[J]. Mathematical and Computer Modelling, 2011, 53(9):1929–1936.

[46] Liao S J. On the relationship between the homotopy analysis method and Euler transform[J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2010, 15(6):1421–1431.

[47] Agnew R P. Euler transformations[J]. American Journal of Mathematics, 1944, 66(2):313–338.

[48] Liao S J, Zhao Y L. On the method of directly defining inverse mapping for nonlinear differential equations[J]. Numerical Algorithms, 2015:1–32.

[49] Liao S J. A new branch of solutions of boundary-layer flows over an impermeable stretched plate[J]. International Journal of Heat and Mass Transfer, 2005, 48(12):2529–2539.

[50] Abbasbandy S, Magyari E, Shivanian E. The homotopy analysis method for multiple solutions of nonlinear boundary value problems[J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2009, 14(9):3530–3536.

[51] Motsa S S, Sibanda P, Awad F G, et al. A new spectral-homotopy analysis method for the MHD Jeffery–Hamel problem[J]. Computers & Fluids, 2010, 39(7):1219–1225.

[52] Yabushita K, Yamashita M, Tsuboi K. An analytic solution of projectile motion with the quadratic resistance law using the homotopy analysis method[J]. Journal of Physics A: Mathematical and theoretical, 2007, 40(29):8403.

[53] Marinca V, Herişanu N. Application of optimal homotopy asymptotic method for solving nonlinear equations arising in heat transfer[J]. International Communications in Heat and Mass Transfer, 2008, 35(6):710–715.

[54] Niu Z, Wang C. A one-step optimal homotopy analysis method for nonlinear differential equations[J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2010, 15(8):2026–2036.

[55] Liao S J. An optimal homotopy-analysis approach for strongly nonlinear differential equations[J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2010, 15(8):2003–2016.

[56] Zhao Y L, Lin Z L, Liao S J. An iterative HAM approach for nonlinear boundary value problems in a semi-infinite domain[J]. Computer Physics Communications, 2013, 184(9):2136–2144.

[57] Motsa S S, Sibanda P, Shateyi S. A new spectral-homotopy analysis method for solving a nonlinear second order BVP[J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2010, 15(9):2293–2302.

[58] Sibanda P, Motsa S, Makukula Z. A spectral-homotopy analysis method for heat transfer flow of a third grade fluid between parallel plates[J]. International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow, 2012, 22(1):4–23.

[59] Motsa S S. Application of the new spectral homotopy analysis method (sham) in the non-linear heat conduction and convective fin problem with variable thermal conductivity[J]. International Journal of Computational Methods, 2012, 9(03):1250039.

[60] Nik H S, Effati S, Motsa S S, et al. Spectral homotopy analysis method and its convergence for solving a class of nonlinear optimal control problems[J]. Numerical Algorithms, 2014, 65(1):171–194.

[61] Liao S J. Advances in the homotopy analysis method[M]. Singapore: World Scientific, 2014.

[62] Liao S J. An analytic approximation of the drag coefficient for the viscous flow past a sphere[J]. International Journal of Non-Linear Mechanics, 2002, 37(1):1–18.

[63] 朗道, 栗弗席兹, 李植. 理论物理学教程 (第 6 卷): 流体动力学 (第 5 版)[M]. 北京: 高等教育出版社, 2013.

[64] Liao S J, Campo A. Analytic solutions of the temperature distribution in Blasius viscous flow problems[J]. Journal of Fluid Mechanics, 2002, 453:411–425.

[65] Ayub M, Rasheed A, Hayat T. Exact flow of a third grade fluid past a porous plate using homotopy analysis method[J]. International Journal of Engineering Science, 2003, 41(18):2091–2103.

[66] Liao S J. An explicit analytic solution to the Thomas–Fermi equation[J]. Applied Mathematics and Computation, 2003, 144(2):495–506.

[67] Hayat T, Khan M, Ayub M. On the explicit analytic solutions of an Oldroyd 6-constant fluid[J]. International Journal of Engineering Science, 2004, 42(2):123–135.

[68] Wu W, Liao S J. Solving solitary waves with discontinuity by means of the homotopy analysis method[J]. Chaos, Solitons & Fractals, 2005, 26(1):177–185.

[69] Zhu S P. An exact and explicit solution for the valuation of American put options[J]. Quantitative Finance, 2006, 6(3):229–242.

[70] Abbasbandy S. The application of homotopy analysis method to solve a generalized Hirota–Satsuma coupled KdV equation[J]. Physics Letters A, 2007, 361(6):478–483.

[71] Tan Y, Abbasbandy S. Homotopy analysis method for quadratic Riccati differential equation[J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2008, 13(3):539–546.

[72] Hashim I, Abdulaziz O, Momani S. Homotopy analysis method for fractional IVPs[J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2009, 14(3):674–684.

[73] Li Y, Nohara B T, Liao S. Series solutions of coupled Van der Pol equation by means of homotopy analysis method[J]. Journal of Mathematical Physics, 2010, 51(6):063517.

[74] Liao S J. On the homotopy multiple-variable method and its applications in the interactions of nonlinear gravity waves[J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2011, 16(3):1274–1303.

[75] Phillips O M. On the dynamics of unsteady gravity waves of finite amplitude[J]. Journal of Fluid Mechanics, 1960, 9:193–217.

[76] Xu D L, Lin Z L, Liao S J, et al. On the steady-state fully resonant progressive waves in water of finite depth[J]. Journal of Fluid Mechanics, 2012, 710:379–418.

[77] Khan N A, Jamil M, Ara A. Approximate solutions to time-fractional Schrödinger equation via homotopy analysis method[J]. ISRN Mathematical Physics, 2012, 2012.

[78] Guerrero F, Santonja F J, Villanueva R J. Solving a model for the evolution of smoking habit in Spain with homotopy analysis method[J]. Nonlinear Analysis: Real World Applications, 2013, 14(1):549–558.

[79] Liu Z, Liao S J. Steady-state resonance of multiple wave interactions in deep water[J]. Journal of Fluid Mechanics, 2014, 742:664–700.

[80] Liao S J. Do peaked solitary water waves indeed exist?[J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2014, 19(6):1792–1821.

[81] Cui J F, Xu H, Lin Z L. Homotopy analysis method for nonlinear periodic oscillating equations with absolute value term[J]. Mathematical Problems in Engineering, 2015, 2015.

[82] Liu Z, Xu D, Li J, et al. On the existence of steady-state resonant waves in experiments[J]. Journal of Fluid Mechanics, 2015, 763:1–23.

[83] Meyer Y. Wavelets and operators[M], Vol. 1. Cambridge: Cambridge university press, 1995.

[84] Young R M. An introduction to nonharmonic Fourier series[J]. 1980, 44(4):9–9.

[85] 关履泰. 小波方法与应用 [M]. 北京: 高等教育出版社, 2007.

[86] Littlewood J E, Paley R E. Theorems on Fourier series and power series (II)[J]. Proceedings of the London Mathematical Society, 1937, 2(1):52–89.

[87] Grossmann A, Morlet J. Decomposition of Hardy functions into square integrable wavelets of constant shape[J]. SIAM Journal on Mathematical Analysis, 1984, 15(4):723–736.

[88] Lemarié P G, Meyer Y. Ondelettes et bases hilbertiennes[J]. Rev. Mat. Iberoamericana, 1986, 2(1-2):1–18.

[89] Mallat S G. Multiresolution approximation and wavelets[M].[S.l.]: Department of Computer and Information Science, School of Engineering and Applied Science, University of Pennsylvania, 1987.

[90] Daubechies I. Orthonormal bases of compactly supported wavelets[J]. Communications on Pure and Applied Mathematics, 1988, 41(7):909–996.

[91] Cohen A, Daubechies I, Feauveau J C. Biorthogonal bases of compactly supported wavelets[J]. Communications on Pure and Applied Mathematics, 1992, 45(5):485–560.

[92] Daubechies I. Orthonormal bases of compactly supported wavelets II. Variations on a theme[J]. SIAM Journal on Mathematical Analysis, 1993, 24(2):499–519.

[93] Beylkin G, Coifman R, Rokhlin V. Fast wavelet transforms and numerical algorithms I[J]. Communications on Pure and Applied Mathematics, 1991, 44(2):141–183.

[94] Mallat S G. A theory for multiresolution signal decomposition: the wavelet representation[J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1989, 11(7):674–693.

[95] 邓东皋, 彭立中. 小波分析 [J]. 数学进展, 1991, 20(3):294–310.

[96] 李建华, 李万社. 小波理论发展及其应用 (综述)[J]. 河西学院学报, 2006, 22(2):27–31.

[97] Young R K. Wavelet theory and its applications[M], Vol. 189.[S.l.]: Springer Science & Business Media, 2012.

[98] Latto A, Tenenbaum E. Compactly supported wavelets and the numerical solution of Burgers' equation[J]. Comptes Rendus de L'Académie des Sciences. Série I, Mathématique, 1990, 311:903–909.

[99] Gomes S M, Cortina E. Convergence estimates for the wavelet Galerkin method[J]. SIAM Journal on Numerical Analysis, 1996, 33(1):149–161.

[100] Regińska T, Eldén L. Stability and convergence of the wavelet-Galerkin method for the sideways heat equation[J]. Journal of Inverse and Ill-Posed Problems, 2000, 8(1):31–49.

[101] Liu Y N, Qin F, Liu Y H, et al. A Daubechies wavelet-based method for elastic problems[J]. Engineering Analysis with Boundary Elements, 2010, 34(2):114–121.

[102] Restrepo J M, Leaf G K. Wavelet-Galerkin discretization of hyperbolic equations[J]. Journal of Computational Physics, 1995, 122(1):118–128.

[103] Amaratunga K, Williams J R. Wavelet-Galerkin solution of boundary value problems[J]. Archives of Computational Methods in Engineering, 1997, 4(3):243–285.

[104] Díaz A R. A wavelet–Galerkin scheme for analysis of large-scale problems on simple domains[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1999, 44(11):1599–1616.

[105] Kim Y Y, Jang G W. Hat interpolation wavelet-based multi-scale Galerkin method for thin-walled box beam analysis[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2002, 53(7):1575–1592.

[106] Jang G W, Kim J E, Kim Y Y. Multiscale Galerkin method using interpolation wavelets for two-dimensional elliptic problems in general domains[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2004, 59(2):225–253.

[107] Lepik Ü. Haar wavelet method for nonlinear integro-differential equations[J]. Applied Mathematics and Computation, 2006, 176(1):324–333.

[108] Winter C. Wavelet Galerkin schemes for option pricing in multidimensional Lévy models[D].[S.l.]: Diss., Eidgenössische Technische Hochschule ETH Zürich, Nr. 18221, 2009, 2009.

[109] Mohammadi F, Hosseini M, Mohyud-Din S T. Legendre wavelet Galerkin method for solving ordinary differential equations with non-analytic solution[J]. International Journal of Systems Science, 2011, 42(4):579–585.

[110] Kestler S, Steih K, Urban K. An efficient space-time adaptive wavelet Galerkin method for time-periodic parabolic partial differential equations[J]. Mathematics of Computation, 2016, 85(299):1309–1333.

[111] 顾云风, 周又和. 简支梁式板的压电动力控制与数值仿真 [J]. 兰州大学学报 (自然科学版), 2000(4):20–24.

[112] 王记增. 正交小波统一理论与方法及其在压电智能结构等力学研究中的应用 [D]. 兰州: 兰州大学, 2001.

[113] Zhou Y H, Zhou J. A modified wavelet approximation of deflections for solving PDEs of beams and square thin plates[J]. Finite Elements in Analysis and Design, 2008, 44(12):773–783.

[114] 王记增, 王晓敏, 周又和. 基于正交小波尺度函数展开的强非线性微分方程求解 [J]. 兰州大学学报 (自然科学版), 2010, 46(5):96–101.

[115] 刘小靖. 非线性问题统一求解的小波方法及其在大变形柔韧结构定量研究中的应用 [D]. 兰州: 兰州大学, 2014.

[116] Chen M Q, Hwang C, Shih Y P. The Computation of Wavelte-Galerkin Approximation on a Bounded Interval[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1996, 39(17):2921–2944.

[117] Dong W. Coiflet–type wavelets: theory, design and applications[J]. Proc. The University of Texas at Austinm, USA, 1998:19–47.

[118] Zhang L, Liu X J, Zhou Y H, et al. Influence of vanishing moments on the accuracy of a modified wavelet Galerkin method for nonlinear boundary value problems[C]//11th International Conference of Numerical Analysis and Applied Mathematics. New York: AIP Publishing, 2013, 1558:942–945.

[119] 周又和, 王记增. 小波尺度函数计算的广义高斯积分法及其应用 [J]. 数学物理学报, 1999, 19(3):293–300.

[120] Zhou Y H, Wang X M, Wang J Z, et al. A wavelet numerical method for solving nonlinear fractional vibration, diffusion and wave equations[J]. Computer Modeling in Engineering and Sciences, 2011, 77(2):137.

[121] Sweldens W, Piessens R. Quadrature formulae and asymptotic error expansions for wavelet approximations of smooth functions[J]. SIAM Journal on Numerical Analysis, 1994, 31(4):1240–1264.

[122] Jacobsen J, Schmitt K. The Liouville-Bratu-Gelfand problem for radial operators[J]. Journal of Differential Equations, 2002, 184(1):283–298.

[123] Buckmire R. Application of a Mickens finite-difference scheme to the cylindrical Bratu-Gelfand problem[J]. Numerical Methods for Partial Differential Equations, 2004, 20(3):327–337.

[124] Jalilian R. Non-polynomial spline method for solving Bratu's problem[J]. Computer Physics Communications, 2010, 181(11):1868–1872.

[125] Boyd J P. An analytical and numerical study of the two-dimensional Bratu equation[J]. Journal of Scientific Computing, 1986, 1(2):183–206.

[126] Xu J C, Shann W C. Galerkin-wavelet methods for two-point boundary value problems[J]. Numerische Mathematik, 1992, 63(1):123–144.

[127] Chang S L, Chien C S. A multigrid-Lanczos algorithm for the numerical solutions of nonlinear eigenvalue problems[J]. International Journal of Bifurcation and Chaos, 2003, 13(05):1217–1228.

[128] Odejide S A, Aregbesola Y A S. A note on two dimensional Bratu problem[J]. Kragujevac Journal of Mathematics, 2006, 29(29):49–56.

[129] Mohsen A, Sedeek L F, Mohamed S A. New smoother to enhance multigrid-based methods for Bratu problem[J]. Applied Mathematics and Computation, 2008, 204(1):325–339.

[130] 季孝达. 数学物理方程 (第 2 版)[M]. 北京: 科学出版社, 2009.

[131] Proudman I, Pearson J R A. Expansions at small Reynolds numbers for the flow past a sphere and a circular cylinder[J]. Journal of Fluid Mechanics, 1957, 2(3):237–262.

[132] Chang D q, Popplewell N. A non-uniform, axially loaded Euler–Bernoulli beam having complex ends[J]. The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics, 1996, 49(3):353–371.

[133] Katsikadelis J T, Tsiatas G C. Non-linear dynamic analysis of beams with variable stiffness[J]. Journal of Sound & Vibration, 2004, 270(4-5):847–863.

[134] Huang S J, Hsieh C T. Coiflet wavelet transform applied to inspect power system disturbance-generated signals[J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 2002, 38(1):204–210.

[135] Bulut F. An alternative approach to compute wavelet connection coefficients[J]. Applied Mathematics Letters, 2016, 53:1–9.

[136] Chui C K, Quak E. Wavelets on a bounded interval[M]//Numerical Methods in Approximation Theory, vol. 9. New York: Springer, 1992:53–75.

[137] Cohen A, Daubechies I, Vial P. Wavelets on the interval and fast wavelet transforms[J]. Applied and Computational Harmonic Analysis, 1993, 1(1):54–81.

[138] Zhang T H, Tian Y C, Tade M O, et al. Comments on: The computation of wavelet-Galerkin approximation on a bounded interval[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2007, 72(2):244–251.

致 谢

本论文得以完成，首先要感谢我的导师廖世俊教授. 学术上，廖老师对我进行悉心指导的同时又给予了我自由发挥的空间，在他的指导和启发下，我很快找到了研究的突破口，并在攻克问题的过程中使自己的能力不断得到提升. 生活中，廖老师在过去两年半的时间里始终给予着我无私的帮助与关怀. 廖老师在学术上敢于挑战、富于创新，有着开阔的视野和敏锐的洞察力，对待工作精益求精，平日生活中为人大气，对我影响深远.

感谢周又和教授提供重要的文献和学习资料，并在科研的过程中对我提出的疑问进行耐心地解答. 周老师和他的课题组所做的工作，为本论文提供了重要的灵感.

感谢在我的科研道路上最初的启蒙老师张怀新教授和吴耀琨教授，张老师对工作的认真与细致、吴老师对数学的热爱与执着，都深深感染了我.

感谢林志良老师、徐航老师和汪淳老师在学术与生活上的无私关怀与帮助.

感谢崔继峰师兄和徐妲莉师姐在我初学同伦分析方法时的热心帮助和在平时生活中的关怀. 感谢刘曾师兄和赵银龙师兄，与你们在学术上与生活中的交流使我受益匪浅. 感谢李晓晨师姐、李晓明师兄、李靖师兄、俞强师兄和钟晓旭、李季阳、杨小岩等在本论文撰写过程中提出的宝贵意见以及在平时科研与生活中给予的无私帮助与关怀. 感谢李娇娇、秦石洁、胡天立等同门，与你们一起奋斗的日子是我最珍贵的回忆. 同伦家族的兄弟姐妹们每个人身上都有我所不具备的优秀品质，是我学习的好榜样.

感谢我的室友刘辉、张鹏坤、张志成、郁扬、刘加志、杨海奇、赵鹏远，是你们营造了和谐的寝室氛围. 宿舍是家，你们便是兄弟，祝各位在以后的人生道路上一帆风顺.

感谢在同伦分析方法及小波理论上做出贡献的学者，你们做出的成果，为本论文奠定了坚实的基础.

感谢我父母和妹妹一直以来对我的支持，正是有了你们的支持，才让我在学习和生活的道路上披荆斩棘、无所畏惧.

谨以此文献给所有关心、支持和帮助过我的老师、亲人、同学和朋友.

攻读学位期间撰写的学术论文目录

[1] 第一作者, SCI. **Zhaochen Yang** and Shijun Liao. A HAM-based wavelet approach for nonlinear ordinary differential equations[J]. **Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation**, 2017, 01.

[2] 第一作者, EI. **杨兆臣**, 张怀新. 基于双向流固耦合的柔性表面覆盖层减阻性能 [J]. **上海交通大学学报**, 2016, 08: 1165-1172.

[3] 第一作者, 会议. **杨兆臣**, 廖世俊, 俞强. 求解非线性边值问题的小波同伦分析方法 [C]. **第十五届现代数学和力学学术会议**, 2016 年 8 月 25-28 日, 厦门.

[4] 第三作者, 会议. 俞强, 廖世俊, **杨兆臣**, 钟晓旭. 一种求解弹性基础上方板解析解的方法 [C]. **第十五届现代数学和力学学术会议**, 2016 年 8 月 25-28 日, 厦门.

[5] 第一作者. **Zhaochen Yang** and Shijun Liao. A HAM-based wavelet approach for nonlinear partial differential equations[J]. Submitted.

[6] 第一作者. **Zhaochen Yang** and Shijun Liao. On the generalized wavelet–Galerkin method[J]. Submitted.