中国数学研究热点论文特约稿

同伦分析方法：研究背景和现状

廖世俊
上海交通大学　上海 200240
E-mail: sjliao@sjtu.edu.cn

1 研究背景

自然科学和工程中的大部分问题都是非线性的，其求解比线性问题要困难得多。高性能计算机的出现，大大提高了人类求解复杂非线性问题的能力，使得数值计算和模拟成为目前广泛使用的手段。但数值计算也存在其局限性，特别是在处理无限区域、多解、奇性等方面颇为困难。而解析近似方法在处理无限域、多解、奇性等方面具有较大的优势。因此，解析近似方法与数值计算方法一样，具有重要的科学价值，一直得到国际学术界的高度重视。

几乎所有的传统解析近似方法都将一个非线性问题以某种方式转化为一系列线性子问题，并用这些子问题之解的线性组合逼近原始非线性问题之解。因此，对一个解析近似方法之优劣可用如下三个标准来评判：

(1)是否总能将任意一个非线性问题转化为一系列线性子问题?

(2)线性子问题是否总能方便地求解?

(3)是否能保证线性子问题解的线性组合总能逼近原始非线性问题?

摄动方法是使用最为广泛的解析近似方法，已成功求解了科学和工程中的许多非线性问题。本质上，摄动方法将非线性方程之解按某个物理小参数展开为无穷级数，并以该物理小参数为基础进行量级分析，将原始非线性问题转化为一系列线性子问题。这里，物理小参数的存在是摄动方法之必要前提。遗憾的是，许多非线性问题，特别是强非线性问题，不具有任何物理小参数，从而传统的摄动方法失效。其次，即使存在一个物理小参数，其高阶摄动方程完全由原始非线性方程和物理小参数所确定，常常不易求解。此外，当原始方程的最高导数项正好与物理小参数相乘时，高阶摄动方程的阶数比原始方程的小，从而出现剩余的初、边值条件，导致所谓的“奇异性”问题。特别是，摄动级数一般都无法确保其收敛到原始方程的解，且绝大多数摄动解仅当物理小参数取值很小时有效。所以，从方法论角度而言，摄动方法不满足上述三个评判标准。这些局限性大大限制了摄动理论的应用范围，是摄动方法通常仅适用于弱非线性问题的根本原因。

为了克服摄动方法的上述局限性，国外学者提出了一些“非摄动方法”，如一个世纪前俄罗斯数学家李雅普诺夫(Lyapunov)提出的人工小参数方法和上世纪60年代法国数学家Adomian提出的分解法。李雅普诺夫人工小参数方法将原始方程之非线性项乘以一个没有物理意义的人工小参数，然后按传统摄动方法获得摄动近似解，再令该人工小参数为 1 以获得解析近似。显然，李雅普诺夫人工小参数方法仅满足上述评判标准(1)。Adomian分解法可以将任何一个非线性方程转化成一系列线性子问题，也满足上述评判标准(1)。遗憾的是，其高阶线性子问题之解一般用幂级数表达，但众所周知，幂级数的收敛半径通常是有限的，因此其收敛性一般无法保证。值得强调的是，所有传统的“非摄动方法”都没有提供一个方便、有效的途径，确保解析近似级数收敛到原始方程之解。因此，与摄动方法类似，这些传统的“非摄动方法”通常也仅适用于弱非线性问题。

综上所述，摄动方法和传统的“非摄动方法”，都不能全部满足上述三个评判标准，因此都具有一定的局

限性。这种方法论上的局限性，限制了我们解析求解非线性问题的能力，阻碍了我们对非线性问题(特别是强非线性问题)进行更加深入的研究和理解。因此，提出一个能满足上述三个评判标准的、全新的解析近似方法，具有重大的理论价值和应用价值。

2 “同伦分析方法”之提出与完善

笔者在1992年的博士论文中首次尝试将拓扑理论中的同伦概念用于求解非线性微分方程的解析近似解，提出了“同伦分析方法”(Homotopy Analysis Method，简称HAM)之雏形，该方法无需任何物理小参数，都可以将一个非线性问题转化为无穷多个线性子问题，且线性子问题的方程类型可自由选取，从而可以方便地求解。因此，早期的“同伦分析方法”满足上述评判标准(1)和(2)，但不满足评判标准(3)。1997年，笔者进一步将传统的同伦概念一般化，提出“广义同伦”之概念，在构造同伦时引入另外一个辅助参数(称为“收敛控制参数”)，并证明该辅助参数可以有效地控制级数解的收敛，从而确保解析近似是原始方程足够精确的解。这是“同伦分析方法”整个发展过程中的最关键步骤。完善后的“同伦分析方法”全部满足上述三个评判标准，从而克服了摄动方法和传统“非摄动方法”的局限性。

20年来，笔者及其研究小组和国内外合作者，一方面在理论上不断发展和完善“同伦分析方法”，证明了一系列收敛性定理和高阶方程的有关定理，形成了一个较为完整的理论体系；另一方面，“同伦分析方法”已被成功地广泛应用于求解自然科学、力学和金融中许多不同类型的非线性问题，证明了其普遍有效性和适用性。特别是，我们还成功找到一些非线性问题全新的解，这些解被其他解析近似方法甚至数值方法所遗漏，显示了“同伦分析方法”的潜力。目前，“同伦分析方法”已被国内、国外许多研究人员采用，成为研究强非线性问题的有效手段之一。

下面简要介绍“同伦分析方法”提出的一些全新的概念。

(1) 收敛控制

同伦是拓扑理论的一个基本概念，用于描述两个对象间的连续变化。传统同伦仅包含一个映射参数$q\in[0, 1]$。早期的“同伦分析方法”就建立在该传统同伦概念之上，通过引入映射参数$q\in[0, 1]$，将原始非线性问题扩展为一簇问题：当q=0时，其为很易求解的线性方程，而当q=1时，其为原始的非线性问题。显然，该簇方程的解依赖映射参数$q\in[0, 1]$，因此可以展开为关于映射参数$q\in[0, 1]$的幂级数，其在q=1处给出的收敛级数，就是原始非线性方程之解。将该幂级数代入原始非线性方程，比较映射参数$q\in[0, 1]$同次幂之系数，即可得到线性的高阶变形方程，其方程类型可以非常灵活地选取，因此可以确保其解存在，且可以方便地求得。

上述早期“同伦分析方法”满足评判标准(1)和(2)，但遗憾的是不能确保级数解之收敛。1997年，笔者扩展了传统同伦之基本思想，提出“广义同伦”概念：除映射参数$q\in[0, 1]$外，还引入一个非零的、没有物理意义的辅助参数(称为“收敛控制参数”)，以增加描述连续变化的自由度。令人惊奇的是，该辅助参数可以有效地调节和控制级数的收敛域和收敛速度，从而提供了一个简便、有效的途径，确保同伦分析方法得到的级数解满足原始非线性方程！“收敛控制参数”的引入，使“同伦分析方法”全部满足了上述三个评判标准，是“同伦分析方法”发展过程中最关键步骤。研究发现，通过选择适当的“收敛控制参数”，可以大大扩展解析近似解的收敛区间和近似精度。例如，“同伦分析方法”给出的一个非线性振动周期的二阶近似公式，对任意大小的振幅都很精确。特别是，当其他解析近似方法给出的解发散时，采用适当的“收敛控制参数”，“同伦分析方法”可以给出收敛的解！

笔者深入探讨了“收敛控制”之机理，严格地证明了一些相关数学定理。笔者证明，通过引入一个“收敛控制参数”得到的$(1-x)^{-1}$之幂级数，可以在除奇点x=1以外的整个实数轴上收敛！此外，笔者应用“同伦分析方法”获得一种全新的变换，并证明该变换在逻辑上包含著名的欧拉变换，更具一般性。这些数学证明，为“收敛控制”概念的合理性奠定了坚实的理论基础。

“收敛控制”是一个全新的概念，是“同伦分析方法”与所有其他解析近似方法(包含摄动方法和传统“非摄动方法”)之根本区别。“收敛控制”概念的提出，为解析级数的收敛提供了一个有效的途径和保障，使“同伦分析方法”成为一个正真意义上的、求解强非线性问题的解析近似方法。

(2) 解表达原则

微分方程之解可用何种完备的基函数之线性组合来表达？理论上，这是所有近似方法(包括数值计算方法)都必须回答的一个基本问题。例如，有限区间[*a*, *b*]上定义的任何连续函数都可用幂级数任意逼近，周期函数可用三角函数任意逼近。不同于以物理小参数为出发点的摄动方法，“同伦分析方法”以解表达为出发点：选择一个合适的、完备的函数基集，使得初始猜测解和所有高阶变形方程之解都可用其表述。笔者率先提出了“解表达原则”：初始猜测解、辅助线性算子、辅助函数的选取，必须使得高阶变形方程之解存在、唯一，且满足所确定的解表达。 理论上，满足同一个解表达的任意两个函数，可以连续地彼此变形为对方。因此，“解表达原则”也是拓扑理论中同伦概念所要求的。“解表达原则”为构造零阶变形方程提供了理论上的指导和依据，方便了“同伦分析方法”的应用，在“同伦分析方法”框架内具有重要理论价值。

我们发现，应用“解表达原则”，可以方便地避免非线性周期振动问题之解出现所谓的“长期项”，以及求解方程中所含的未知物理量。特别是，灵活应用“解表达原则”有时可以大大简化问题的求解。例如，应用“解表达原则”及“同伦分析方法”提供的选择辅助线性算子之自由，我们成功地将2阶的(二维)Gelfand 偏微分方程转化为无穷多个4阶的、非常容易求解的线性偏微分方程，所得到的级数解不仅收敛，而且与他人发表的数值解吻合很好。该种转化之前从未见过报道，这从一个方面体现了“同伦分析方法”的灵活性和创新性。

(3) 变形导数和变形导数算子

为了方便地给出高阶变形方程，笔者提出“变形导数”和“变形导数算子”，并证明了一系列相关的数学定理。根据这些定理，用计算机代数软件，可以非常方便地自动推导出高阶变形方程。这大大简便了“同伦分析方法”的应用。

此外，笔者还提出了许多概念和定义，如“零阶变形方程”、“高阶变形方程”、“同伦-泰勒级数”、“同伦级数解”、“收敛控制参数”、“多解控制参数”、“最佳收敛控制参数”、“辅助函数”等。这些概念和定义，目前已被学术界广泛采用。

综上所述，不同于其他解析近似方法，“同伦分析方法”全部满足前面提出的关于解析近似方法的三个评判标准，克服了其他传统解析近似方法的局限性，具有如下优点：

- 不依赖物理小参数，无论方程是否含有物理小参数都有效；
- 提供了一个简便的途径确保级数解之收敛；
- 提供了很大的自由选择高阶方程之类型和辅助线性算子，从而可以方便地获得高阶近似；
- 逻辑上包含传统的“非摄动方法”，如李雅普诺夫人工小参数方法、Adomian分解法等，而1998年提出的“同伦摄动方法”本质上与1992年笔者提出的早期“同伦分析方法”完全一样。

3 最新进展与展望

自1992年笔者提出“同伦分析方法”之雏形至今已20余年，“同伦分析方法”在理论上得到不断发展和完善，应用领域不断扩展。其中，1997年引入“收敛控制参数”是“同伦分析方法”发展的最关键步骤。2003年CRC出版的笔者英文专著Beyond Perturbation: An Introduction to the Homotopy Analysis Method，较为系统地描述了“同伦分析方法”的基本思想和典型应用，该专著之中文翻译2006年由科学出版社出版发行。

笔者英文专著Homotopy Analysis Method in Nonlinear Differential Equations 2011年底由 Springer(负责海外销售)和高教出版社(负责国内销售)联合出版。该专著分三个部分。第一部分全面系统地描述了同伦分析方法的基本思想和理论体系，详细介绍了新近提出的“优化同伦分析方法”(optimal homotopy analysis method)，探讨了“收敛控制”概念之数学基础，系统地证明了有关高阶变形方程、变形导数之定理以及欧拉变换与“同伦分析方法”之联系，指出了“同伦分析方法”与其他解析近似方法的根本区别和联系。

该专著第二部分介绍笔者基于“同伦分析方法”和计算机代数软件 Mathematica 开发的、求解非线性边值问题的软件包 BVPh (1.0版本)之理论基础和应用举例。该软件包目前可以求解有限(或无限)区域内多种类型的非线性常微分方程，这些方程可以具有多解、奇性和多点边值条件。它甚至还可以求解与非定常、非相似边界

层流动相关的一些偏微分方程。BVPh (1.0版本)软件已获国家计算机软件著作权，可在笔者主页上免费下载(http://numericaltank.sjtu.edu.cn/)。我们将不断发展和完善该软件，进一步简化“同伦分析方法”之应用，扩展其应用领域，使其成为求解强非线性问题的一个有效而方便的工具。

该专著第三部分给出“同伦分析方法”求解非线性偏微分方程的具体例子，如Gelfand非线性特征值方程、美式期权定价问题、非线性波浪与非均匀流的相互作用问题、任意多个非线性水波的共振问题，以证实“同伦分析方法”求解复杂非线性问题之有效性。值得特别指出的是，由摄动方法和渐进法获得的美式期权定价之解析近似公式，通常仅在数星期或数月的时间范围内有效，而该专著基于“同伦分析方法”给出的解析公式，通常在十几年甚至半个世纪内都是有效的！笔者开发了一个相关的实用软件，可以在几秒钟内得到精确的美式期权定价。该软件已获国家计算机软件著作权，在笔者主页上可免费下载。这个例子，说明了“同伦分析方法”求解复杂非线性偏微分方程的有效性和潜力。

尽管经历了20余年的发展，“同伦分析方法”仍然需要理论上的进一步完善和应用领域上的进一步扩展。近期内，我们研究小组将主要致力于完善基于“同伦分析方法”开发的、求解非线性边值问题的软件包BVPh，同时应用“同伦分析方法”研究一些全新的非线性问题(特别是强非线性问题)，以丰富我们对非线性现象的知识，加深对非线性现象的理解。

作者简介：
廖世俊博士，上海交通大学特聘教授、博士生导师，曾任教育部“长江奖励计划特聘教授”，国家杰出青年科学基金获得者。1992年率先提出求解非线性问题的“同伦分析方法”，至今已撰写相关英文专著两本，发表杂志论文近百篇。曾获“上海市第七届自然科学牡丹奖”及2009年度“上海市自然科学一等奖”。

中国数学研究热点论文特约稿

非线性电路与系统的热点研究领域：
复杂多卷波电路与系统

吕金虎[1]　陈关荣[2]
1中国科学院数学与系统科学研究院　北京 100190
2香港城市大学电子工程系　香港
E-mail: jhlu@iss.ac.cn, gchen@ee.cityu.edu.hk

1983年，L.O. Chua发明了双卷波的Chua电路，第一次用非线性电路完成了混沌系统的物理实现，成为当今混沌科学和非线性电路理论研究的一个基本模型。随之而来的一个自然问题是：能否利用简单的电子元器件有目的地产生人们需要的各种空间构形的多卷波？在过去近30年里，国际上很多研究小组在这个领域做了大量的探索性研究工作，如L. O. Chua及J. P. L. Vandewalle的研究小组早期在多卷波的理论设计和电路实现领域做出