



中国数学研究热点论文特约稿

同伦分析方法：

求解强非线性问题的一个新途径

廖世俊

上海交通大学船舶海洋与建筑工程学院 上海 200240

E-mail: sjliao@sjtu.edu.cn

科学和工程中的绝大部分问题是非线性的。摄动理论被广泛地应用于许多非线性问题之求解，从深度和广度上都大大加深了人类对非线性问题本质的理解。然而，摄动方法过分依赖物理小参数，通常仅适用于弱非线性问题，这大大限制了其应用范围。此外，传统的“非摄动方法”，如Lyapunov人工小参数法、Adomian分解法等，虽然形式上不依赖小参数，但它们与摄动方法一样，都不能提供一个便捷的途径确保所求得的级数解收敛，从而确保所获得的解析近似足够精确。因此，就本质而言，传统的解析近似方法通常仅适用于弱非线性问题。所以，提出求解强非线性方程全新的解析近似方法具有重要的理论和应用价值。

1992年笔者在其上海交通大学博士学位论文中，率先将拓扑理论的同伦概念应用于非线性方程解析近似求解，提出了一个求解非线性方程级数解的一般方法——同伦分析方法。1997年，笔者进一步引入一个辅助参数(称为“收敛控制参数”)将同伦概念一般化，提出“广义同伦”概念，从而提供了一个便捷的方式控制级数解的收敛，使同伦分析方法不仅不依赖物理小参数，而且适用于强非线性问题(请见S.J. Liao, *Int. J. Nonlin. Mech.*, 1997, 32:815-822)。“收敛控制参数”的提出，是完善同伦分析方法关键性的一步。1999年，笔者将同伦概念进一步一般化，使同伦分析方法更具一般性，适用于更多

的非线性问题。此后，我们在理论上不断发展和完善同伦分析方法，逐步形成一个较为完整的理论框架：证明了收敛性定理；提出了三大原则以指导辅助线性算子、辅助函数和初始猜测解之选取；提出了加速同伦级数收敛的同伦-Padé方法；将其他“非摄动方法”统一到同一个理论框架内。另一方面，我们将同伦分析方法成功应用于力学和应用数学中大量强非线性问题的解析求解。特别是，我们应用同伦分析方法成功获得某些非线性方程从未见报道的、全新的解，这些新解被其他解析近似方法、甚至数值方法所遗漏。这显示了同伦分析方法求解强非线性问题的潜力。2003年笔者英文专著Beyond Perturbation: Introduction to the Homotopy Analysis Method由美国CRC出版，标志着同伦分析方法理论框架的基本形成。2006年该专著之中文翻译版由科学出版社出版发行。2004年笔者在*Applied Mathematics and Computation*上发表的这篇论文具有综述性质，因此在我们同伦分析方法之系列文章中被引用得较多，但其学术价值不及笔者上述的1992、1997、1999和2003年的论文或专著。

与传统解析近似方法相比，同伦分析方法具有下述优点。(1)普遍有效性：无论非线性方程是否含有物理小参数，都可应用同伦分析方法求解；(2)确保收敛性：总可以选取适当的收敛控制参数和辅助线性算子确保级数解之收敛；(3)灵活性：可自由选取基函数来表达级数



解, 并自由选取对应的辅助线性算子和初始近似解。因此, 同伦分析方法从本质上克服了摄动方法和其他“非摄动方法”的局限性, 适合于强非线性方程的求解。

同伦分析方法已被中、美、英、澳大利亚、加拿大、印度、伊朗等十几国的研究者广泛应用于求解力学、工程、金融和科学中的非线性方程。美国夏威夷大学, 国内浙江大学、同济大学、复旦大学、华东师范大学、大连理工等大学已完成多篇相关博士、硕士学位论文。国内其他研究小组在该方法的理论发展和应用上也做出了很大的成绩。例如楼森岳研究小组将同伦分析方法与群论成功结合, 清华大学王光谦研究小组将其应用于低浓度颗粒流的Boltzmann方程之求解, 等等。这些成功的应用, 说明同伦分析方法日益成为求解力学中非线性问题的一个有效工具。

科学新闻

动态补偿阿秒脉冲啁啾的新方法

强场高次谐波与阿秒脉冲是重要的前沿科学研究领域。阿秒脉冲能以前所未有的精度探测超快电子动力学, 引起了人们的极大关注。目前, 该领域最重要的科学目标之一就是获得尽可能短的高次谐波阿秒脉冲。但是变换极限阿秒脉冲的获得受到高次谐波辐射固有啁啾的限制, 因而对阿秒脉冲进行位相控制和啁啾补偿从而产生变换极限阿秒脉冲就显得至关重要。中科院上海光机所强场激光物理国家重点实验室徐至展和李儒新研究小组设计了一种动态补偿阿秒谐波脉冲啁啾的方法。他们在强场高次谐波的驱动基频激光场上叠加了一个弱的倍频场, 通过调节双色场间的相对延迟, 可使啁啾的补偿实现从负到正的连续变化。采用这种新方法, 他们第一次在实验上实现了对阿秒脉冲负啁啾的补偿, 并获得了近变换极限的阿秒脉冲。相关研究论文发表在2009年7月24日*Physical Review Letters*, 103, 043904上。

光偏振态的单磁振子量子存储

美国麻省理工学院Vladan Vuletic研究小组示范了一种量子存储方式, 一个光子偏振态可以在由两个冷原子团共享的单一集体自旋激发(磁振子)上映射。该磁振子可以在稍后被转化为一个偏振光子, 与输入态相比其偏振保真度超过90%, 超过2/3的经典极限。上述结果表明, 这一过程可以作为一种非破坏性的量子探针, 在不影响光子偏振的前提下检测、存储和重建光子。相关

目前, 我们在理论上主要研究最佳辅助线性算子和最佳收敛控制参数的选取, 在应用上主要求解一些典型非线性偏微分方程的级数解以及某些领域全新的问题。此外, 我们正与华东师范大学计算机系几位学者合作, 针对某些类型的非线性微分方程, 开发基于同伦分析方法的符号自动推导程序。

尽管自1992年同伦分析方法提出至今已有17年, 但该方法仍在不断完善和发展之中。遗憾的是, 由于教育背景的原因, 我们主要从应用数学和力学的角度来发展和完善该方法。但我深信, 纯数学可以给出更简洁、更优美的结果。期待今后有更多纯数学背景的研究人员对该方法感兴趣, 从纯数学的观点进一步发展和完善该方法。

研究论文发表在2009年7月24日*Physical Review Letters*, 103, 043601上。

量子情境性的态非依赖性实验验证

量子现象能否通过含隐变量的经典模型来解释一直是科学界长期争论的一个问题。Bell于1964年发现某些经典模型不能解释量子力学对远距离粒子特定状态的预测, 而且一些隐变量模型已经被实验排除。经典模型的一种直观特征是非情境性, 即任何测量得到的结果都不受其他同时执行的相容测量的影响。但Kochen、Specker和Bell的理论研究认为非情境性与量子力学相冲突。这种冲突存在于理论结构内, 而不依赖于特定态的性质。不过Kochen-Specker理论能否被实验验证也是一个存在争议的问题。目前, 首批提议的对量子情境性的实验室验证工作采用光子和中子进行。不过这些验证工作需要产生特定量子态, 这存在许多漏洞。奥地利科学院量子光学和量子信息研究所C. F. Roos研究小组及其合作者利用捕获的离子进行实验, 证实存在一种与非情境性的态非依赖性冲突。这种实验不存在检测漏洞, 虽然存在不完整性和可能的测量干扰, 但是实验结果不能通过非情境的方式来解释。相关研究论文发表在2009年7月23日*Nature*, 460(7254): 494-497上。