第 39 卷 第 5 期　　力 学 学 报　　Vol. 39, No. 5
2007 年 9 月　　Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics　　Sep., 2007

具有多个极限环非线性动力系统的解析近似[1)]

成 钧　廖世俊[2)]

(上海交通大学船舶海洋与建筑工程学院，上海 200030)

摘要 应用一种新的解析方法 —— 同伦分析法，研究了一种具有多个极限环的 Rayleigh 振子问题．与所有其他传统方法不同，该方法不依赖于小参数，且提供了一个简便的途径以确保级数解的收敛，因此，特别适用于强非线性问题．将同伦分析法与平均法以及四阶的龙格库塔方法 (数值解) 做了比较．结果表明，平均法在强非线性情况失效，四阶的龙格库塔法不能找到非稳定的极限环，而同伦分析法不仅适用于强非线性情况，而且给出了非稳定的极限环．

关键词 非线性振动，同伦分析法，极限环， Rayleigh 振子，自治系统

中图分类号： O322　　**文献标识码**： A　　**文章编号**： 0459-1879(2007)05-0715-06

引　言

考虑一具有多个极限环的动力系统，形如下式

$$\ddot{x}+x+\epsilon\sin\dot{x}=0 \tag{1}$$

式中点表示对时间 t 求导，ϵ 为参数．这是 Raycigh 振子 [1]

$$\ddot{x}+x=\epsilon\,\dot{x}\left(1-\frac{1}{3}\dot{x}^2\right),\qquad \epsilon>0 \tag{2}$$

的一个变形．将式 (1) 中 $\sin\dot{x}$ 泰勒展开，前两项即为

$$\dot{x}-\frac{1}{6}\dot{x}^3 \tag{3}$$

从表面上看，这两个方程的解似乎应有相同的结构，但实际上却完全不同．求解振动问题通常采用的方法是摄动法，比如谐波平衡法 [2], Lindstedt-Poincarè 法 [3,4], Krylov-Bogolioubov-Mitropolski 法 [5], 平均法 [6] 和多尺度法 [3]．对小参数进行级数展开后，可以将式 (1) 化为一线性方程组．理论上来说，求解这些微分方程就可以得到任意高阶的级数解，但由于计算量很大，实际计算比较困难．另外如果参数 ϵ 并非小量，很明显摄动方法将不适用．由于上述摄动方法的不足，有必要寻找一种新的方法．

廖世俊[7] 基于代数拓扑学中连续映射的概念，提出了一种新的求解非线性问题解析解的一般方法 —— 同伦分析法．不同于摄动方法，同伦分析法的有效性与是否存在小参数无关，所以不仅适用于弱非线性问题，也适用于强非线性问题．而且，不同于所有已知的解析近似方法，同伦分析法提供了一个简单的途径调节和控制级数解的收敛区间．从方法的普遍性来看，同伦分析法在逻辑上包含了 Adomian 方法、δ 展开法和 Lyapunov 人工小参数法 [7]．此外， Hayat[8] 和 Saijid[9] 严格证明，“同伦摄动法” [10] 也仅是“同伦分析法” [7] 的一个特例．因此，同伦分析方法是一种更普遍、更一般的方法．近年来，同伦分析法已成功地解决了许多非线性问题 [11~16]．Zhu[17] 应用同伦分析法成功求解了金融数学中著名的美国期权问题，显示了同伦分析法的普遍有效性．此外，应用同伦分析法，发现了一些全新的、甚至被数值方法所遗漏的非线性问题之解 [18]．综上所述，充分证明了同伦分析法的有效性和潜力．

本文将应用同伦分析法研究具有多个极限环的 Reyleigh 振子问题 (方程 (1))．令

$$x(t)=au(\tau),\qquad \tau=\omega t \tag{4}$$

于是，控制方程 (1) 变成

$$a\omega^2u''(\tau)+au(\tau)+\epsilon\sin[a\omega u'(\tau)]=0 \tag{5}$$

2006–08–28 收到第 1 稿， 2007–06–22 收到修改稿．

1) 上海市优秀学科带头人 (05XD14011) 及长江学者和创新团队发展计划 (IRT0525) 资助项目．

2)E-mail: sjliao@sjtu.edu.cn

其中 a 为振幅，ω 为频率，撇表示对 τ 求导. 不失一般性，我们设初始条件为

$$u(0)=1\,,\qquad u'(0)=0 \tag{6}$$

1 同伦分析法

同伦分析法的基本思想来自于代数拓扑中的连续映射. 我们希望构造一个连接方程 (5) 的解 $u(\tau)$ 和一个给定函数 $u_0(\tau)$ 之间的同伦 $\Phi(\tau;q), q\in[0,1]$，使得 $\Phi(\tau;1)=u(\tau)$, $\Phi(\tau;0)=u_0(\tau)$. 首先，需要确立一组基函数，即解表达式. 由于要求的是原方程的周期解，为此选解表达式为

$$u(\tau)=\alpha_0+\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n\cos n\tau+\beta_n\sin n\tau) \tag{7}$$

其中 α_n 和 β_n 是系数.

根据式 (7), 并且满足初始条件 (6), 选择

$$u_0(\tau)=\cos\tau \tag{8}$$

称之为 $u(\tau)$ 的初始猜测值. 引入一个非零的辅助参数 $\hbar\neq 0$, 构造如下零阶形变方程

$$(1-q)\mathcal{L}[\Phi(\tau;q)-u_0(\tau)]=\hbar q\mathcal{N}[\Phi(\tau;q),A(q),\Omega(q)] \tag{9}$$

以及初始条件

$$\Phi(0;q)=1,\qquad \left.\frac{\partial\Phi(\tau;q)}{\partial\tau}\right|_{\tau=0}=0 \tag{10}$$

其中，$\mathcal{L}$ 是辅助线性算子，定义如下

$$\mathcal{L}=a_0\omega_0^2\Big(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\tau^2}+1\Big) \tag{11}$$

易知

$$\mathcal{L}(C_1\sin\tau+C_2\cos\tau)=0\,,\quad C_1,C_2\in\Re \tag{12}$$

非线性算子 $\mathcal{N}$ 由控制方程 (5) 决定，定义如下

$$\mathcal{N}(A,\Omega,\Phi)=A\Omega^2\frac{\partial^2\Phi}{\partial\tau^2}+A\Phi+\epsilon\sin\Big(A\Omega\frac{\partial\Phi}{\partial\tau}\Big) \tag{13}$$

这样，当 $q=0$, 由式 (9),(10) 可以得到

$$\Phi(\tau;0)=u_0(\tau),\quad A(0)=a_0,\quad \Omega(0)=\omega_0 \tag{14}$$

当 $q=1$, 由于 $\hbar\neq 0$, 式 (9),(10) 等同于原方程 (5) 和初始条件 (6), 从而

$$\Phi(\tau;1)=u(\tau),\quad A(1)=a,\quad \Omega(1)=\omega \tag{15}$$

因此，当 q 从 0 增加到 1 时，零阶形变方程的解 $\Phi(\tau;q)$ 就从初始猜测值 $u_0(\tau)=\cos\tau$ 变化到方程 (5) 的解 $u(\tau)$; $A(q)$ 从零阶振幅值 a_0 变化到振幅 a; $\Omega(q)$ 从 ω_0 变化到 ω. 这样就构造了同伦.

利用泰勒展开公式和式 (14), $\Phi(\tau;q)$, $A(q)$ 和 $\Omega(q)$ 可以分别展开成如下 q 之幂级数

$$\Phi(\tau;q)=u_0(\tau)+\sum_{n=1}^{\infty}u_n(\tau)q^n \tag{16}$$

$$\Omega(q)=\omega_0+\sum_{n=1}^{\infty}\omega_n q^n \tag{17}$$

$$A(q)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n q^n \tag{18}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}u_n(\tau)&=\frac{1}{n!}\left.\frac{\partial^n\Phi(\tau;q)}{\partial q^n}\right|_{q=0}\\ \omega_n&=\frac{1}{n!}\left.\frac{\mathrm{d}^n\Omega(q)}{\mathrm{d}q^n}\right|_{q=0}\\ a_n&=\frac{1}{n!}\left.\frac{\mathrm{d}^n A(q)}{\mathrm{d}q^n}\right|_{q=0}\end{aligned}\right\} \tag{19}$$

注意到，零阶形变方程 (9) 实际上包含有非零参数 $\hbar$. 假设我们已经选择了一个适当的 $\hbar$ 值，可以使得上述级数在 $q=1$ 全部收敛. 那么由式 (15) 就可以得到

$$u(\tau)=u_0(\tau)+\sum_{n=1}^{\infty}u_n(\tau) \tag{20}$$

$$\omega=\omega_0+\sum_{n=1}^{\infty}\omega_n \tag{21}$$

$$a=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n \tag{22}$$

简便起见，记

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{u}_k&=\{u_0,u_1,u_2,\cdots,u_k\}\\ \boldsymbol{a}_k&=\{a_0,a_1,a_2,\cdots,a_k\}\\ \boldsymbol{\omega}_k&=\{\omega_0,\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_k\}\end{aligned}\right\} \tag{23}$$

将零阶形变方程 (9), (10) 对 q 求导 m 次，然后除以 $m!$ ，最后令 $q=0$ ，就得到高阶形变方程

$$\mathcal{L}\left[u_m(\tau)-\chi_m\,u_{m-1}(\tau)\right]=\hbar R_m\left[\boldsymbol{u}_{m-1}(\tau),\boldsymbol{a}_{m-1},\boldsymbol{\omega}_{m-1}\right] \tag{24}$$

和初始条件

$$u_m(0)=u_m'(0)=0 \tag{25}$$

其中

$$\chi_k=\begin{cases}0, & k\le 1\\ 1, & k>1,\end{cases}\tag{26}$$

$$R_m[\boldsymbol{u}_{m-1}(\tau),\boldsymbol{a}_{m-1},\boldsymbol{\omega}_{m-1}]=\frac{1}{(m-1)!}\frac{\partial^{m-1}\mathcal{N}[\Phi(\tau;q),A(q),\Omega(q)]}{\partial q^{m-1}}\bigg|_{q=0}=\sum_{n=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{n}\omega_j\omega_{n-j}\sum_{i=0}^{m-1-n}a_{m-1-n-i}u_i''(\tau)+\sum_{n=0}^{m-1}a_{m-1-n}u_n(\tau)+\epsilon G_m\tag{27}$$

和

$$G_m=\frac{1}{(m-1)!}\frac{\partial^{m-1}\sin[A(q)\Omega(q)\partial_\tau\Phi(\tau;q)]}{\partial q^{m-1}}\bigg|_{q=0}\tag{28}$$

上式可以借助符号推导软件 Mathematica 给出，如前两项为

$$\left.\begin{aligned}G_1&=-\sin(a_0\omega_0\sin\tau)\\ G_2&=\cos(a_0\omega_0\sin\tau)[a_1\omega_0u_0'(\tau)+\\ &\quad a_0\omega_1u_0'(\tau)+a_0\omega_0u_1'(\tau)]\\ &\vdots\end{aligned}\right\}\tag{29}$$

为了满足式 (7)，我们利用下面公式将 G_m 进行展开 [19]

$$\cos(x\sin\tau)=\mathrm{J}_0(x)+2\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{J}_{2n}(x)\cos 2n\tau\tag{30}$$

$$\sin(x\sin\tau)=2\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{J}_{2n+1}(x)\sin(2n+1)\tau\tag{31}$$

其中 $\mathrm{J}_k(x)$ 是第一类 k 阶贝塞尔函数．这样，级数解就都可以用所选的基函数表达出来了．

注意到，一共有 3 个未知量 $u_m(\tau)$，a_{m-1} 和 ω_{m-1}，但是目前还只有关于 $u_m(\tau)$ 的两个方程式 (24) 和 (25)．为了使得问题封闭，必然还需要另外两个方程．根据式 (7)，易知

$$R_m=\sum_{n=0}^{\infty}A_{m,n}\cos(2n+1)\tau+\sum_{n=0}^{\infty}B_{m,n}\sin(2n+1)\tau\tag{32}$$

其中 $A_{m,n}$ 和 $B_{m,n}$ 为系数．由辅助线性算子性质 (12) 可知，如果 $A_{m,0}$ 和 $B_{m,0}$ 不为零，高阶形变方程 (24) 的解中必将会出现所谓的长期项 $\tau\cos\tau$ 和 $\tau\sin\tau$ —— 这就违反了式 (7)．为了避免长期项的出现，$\cos\tau$ 和 $\sin\tau$ 的系数必须为零，即

$$A_{m,0}=0,\qquad B_{m,0}=0,\qquad m=1,2,3,\cdots\tag{33}$$

有了这两个代数方程，a_{m-1} 和 ω_{m-1} 就可以分别解出，于是整个问题封闭．高阶形变方程 (24) 的解也可以很容易地写出来

$$u_m(\tau)=\chi_mu_{m-1}(\tau)-\frac{\hbar}{4a_0\omega_0^2}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{A_{m,n}\cos(2n+1)\tau+B_{m,n}\sin(2n+1)\tau}{n(n+1)}+C_1\sin\tau+C_2\cos\tau\tag{34}$$

其中 C_1 和 C_2 是积分常数，由初始条件 (25) 确定．例如，当 $m=1$ 时有

$$R_1=a_0(1-\omega_0^2)\cos\tau-2\epsilon\mathrm{J}_1(a_0\omega_0)\sin\tau-2\epsilon\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{J}_{2n+1}(a_0\omega_0)\sin(2n+1)\tau\tag{35}$$

由式 (33) 可知 $\cos\tau$ 和 $\sin\tau$ 的系数应该为零

$$a_0(1-\omega_0^2)=0\,,\qquad 2\epsilon\mathrm{J}_1(a_0\omega_0)=0\tag{36}$$

得

$$\omega_0=1\,,\qquad a_0=z_k\tag{37}$$

其中 z_k 是第一阶第一类贝塞尔函数的第 k 个零点

$$\left.\begin{aligned}&z_1\approx 3.8317\,,\ z_2\approx 7.0156\\ &z_3\approx 10.1735\,,\ z_4\approx 13.3237\,,\cdots\end{aligned}\right\}\tag{38}$$

由于 $\mathrm{J}_1(z)$ 有无穷多个简单零点，所以原方程 (1) 也有无穷多个极限环．当 $\epsilon<0$ 时，对应于第奇数个零点的极限环是稳定的；第偶数个极限环是不稳定的；当 $\epsilon>0$ 时则相反．关于这方面的结论可以参考文献 [3].

得到了零阶结果 a_0 和 ω_0 之后，由式 (34) 和初始条件 (25) 可以推出

$$u_1(\tau)=\sum_{n=0}^{\infty}\beta_{1,2n+1}\sin(2n+1)\tau\tag{39}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}\beta_{1,2n+1}&=\Big(\frac{\hbar\epsilon}{2z_k}\Big)\frac{\mathrm{J}_{2n+1}(z_k)}{n(n+1)},\ n\ge 1\\ \beta_{1,1}&=-\sum_{n=1}^{\infty}(2n+1)\beta_{1,2n+1}\end{aligned}\right\}\tag{40}$$

当 $m>1$ 时， a_0 和 ω_0 已求得，所以方程 (33) 成为线性方程. 这样就把原非线性问题转化成了一个非线性零阶形变方程和一系列线性的高阶形变方程. 高阶结果可以利用软件 Mathematica 来完成.

2 结果分析

由于高阶形变方程 (24) 的右边项中含有辅助参数 $\hbar$ ，那么 $u(\tau)$ ， a 和 ω 也将包含 $\hbar$. $\hbar$ 在同伦分析法中起着控制和调整收敛范围的作用. 通常的物理问题都具有物理特征值，例如文中的振幅 a. 可以通过该特征值与 $\hbar$ 的函数曲线来确定合适的 $\hbar$ 值. 具体来说：利用符号推导软件求得高阶结果后，把 $\hbar$ 看成是自变量，高阶振幅值 a (图中为 8 阶) 看成关于 $\hbar$ 的函数，做出 a-$\hbar$ 曲线，如图 1. 廖世俊 [7] 证明只要 $\hbar$ 的取值使得级数解收敛，那么所得到的级数解就必然是原方程的一个解. 也就是说，如果解唯一，他们都应收敛到相同的值，从而在 a-$\hbar$ 曲线中存在一条水平线段，其对应的 $\hbar$ 的取值区域就是 $\hbar$ 的有效区域. 显然，在 $\hbar$ 的有效区域内选取的 $\hbar$ 值，相应级数必然收敛. 对于多解问题，通常我们可以求出或者设法构造出多个零阶解. 对于每一个零阶解，计算到高阶之后，也可以做出 $\hbar$ 曲线. 利用这样的方法，我们曾经报道过一类边界层流动方程的新解 [18]. 在图 1 中，我们描绘了当 $\epsilon=-1$ 时的前 3 个极限环的 a-$\hbar$ 曲线. 对应第 1 个极限环的 $\hbar$ 的有效区域为 $-1.2<\hbar<-0.4$ ，对应第 2 个极限环的 $\hbar$ 的有效区域为 $-1.2<\hbar<-0.6$ 和对应第 3 个极限环的 $\hbar$ 的有效区域为 $-1.4<\hbar<-0.8$.

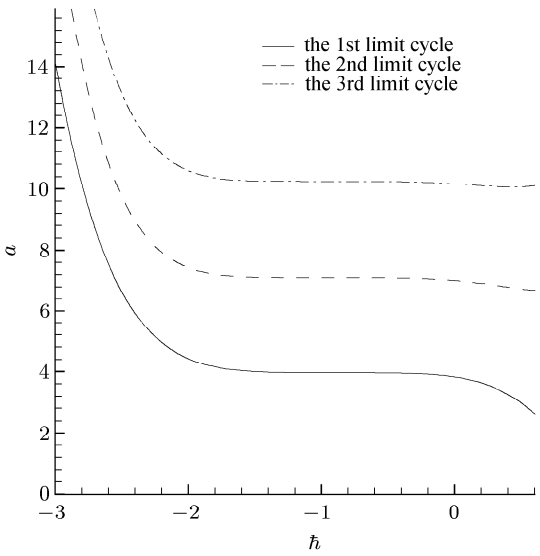

图 1 $\epsilon=-1$ 时的 a-$\hbar$ 曲线 (8 阶近似)

Fig.1 The a-$\hbar$ curve when $\epsilon=-1$

在上述 $\hbar$ 有效区域内的任何 $\hbar$ 值都可以使得级数解收敛. 此外，我们还可以利用同伦 - 帕德 (Homotopy-Padé) 方法 [7] 加速收敛. 所求得的 $[m,m]$ 阶同伦 - 帕德近似解与参数 $\hbar$ 无关.

由控制方程 (5) 可知参数 ϵ 越大，振幅 a 越小，非线性就越强. 我们做出了当 ϵ 分别等于 $-1,-2,-3$ 时，相平面中的前 4 个极限环，如图 2～ 图 4. 可以看到：在非线性弱的时候，极限环看上去像一个圆形；而非线性较强的时候，极限环则像平行四边形. 我们还比较了应用不同方法所求得的解. 分别为 $[5,5]$

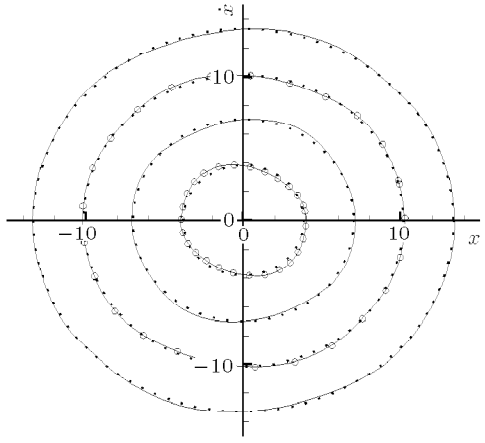

图 2 当 $\epsilon=-1$ 时的前 4 个极限环. 实线： $[5,5]$ 阶同伦 - 帕德近似；实心圆：平均法；空心圆：龙格库塔法

Fig.2 The limit cycles when $\epsilon=-1$. Solid line: [5,5] homotopy Padé method; Filled circle: averaging method; Open circle: Runge-Kutta method

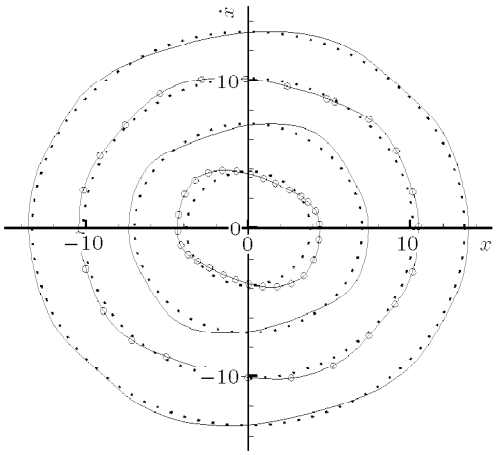

图 3 当 $\epsilon=-2$ 时的前 4 个极限环. 实线： $[5,5]$ 阶同伦 - 帕德近似；实心圆：平均法；空心圆：龙格库塔法

Fig.3 The limit cycles when $\epsilon=-2$. Solid line: [5,5] homotopy Padé method; Filled circle: averaging method; Open circle: Runge-Kutta method

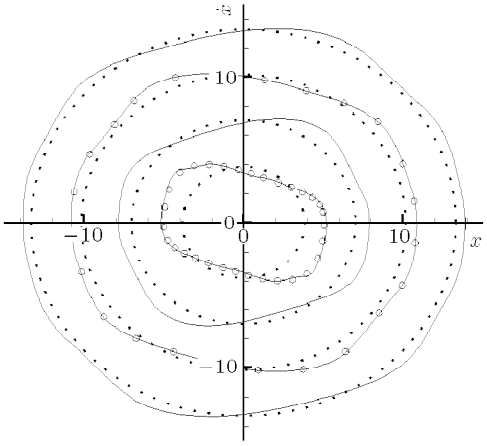

图 4　当 $\epsilon=-3$ 时的前 4 个极限环．实线：　[5,5] 阶同伦 - 帕德近似；实心圆：平均法；空心圆：四阶龙格库塔法

Fig.4　The limit cycles when $\epsilon=-3$. Solid line: [5,5] homotopy Padé method; Filled circle: averaging method; Open circle: Runge-Kutta method

阶同伦 - 帕德方法、平均法、四阶龙格库塔法求得的解．显然，随着非线性的增强摄动方法逐渐失去其准确性．而应用数值计算则找不到第 2 和第 4 个极限环，因为第偶数个的极限环是非稳定的．但是同伦分析法不仅适用于强非线性情况，也可以找出非稳定的极限环．

3 结　论

本文运用一种新的解析方法 —— 同伦分析法，研究了一种具有多个极限环的变形 Rayleigh 振子．与所有其他传统方法不同，该方法不依赖于小参数，且提供了一个简便的途径确保级数解的收敛．所以，本文中的参数 ϵ 完全不必是小量．　ϵ 越大，　a 越小，非线性就越强．当非线性逐渐增强时，极限环从圆形逐渐趋向于一个平行四边形．这表明，同伦分析法可用于求解具有多个极限环的强非线性问题．本文还将同伦分析法和平均法以及四阶的数值解 (龙格库塔方法) 做了比较．结果表明，平均法在强非线性情况失效，四阶的龙格库塔法不能找到非稳定的极限环，而同伦分析法不仅适用于强非线性问题，也适用于非稳定的极限环情况．

参　考　文　献

1 Kahn PB, Yair Zarmi. Nonlinear Dynamics: Exploration through Normal Forms. New York: John Wiley & Sons, Inc, 1998

2 Atadan AS, Huseyin K. An intrinsic method of harmonic analysis for non-linear oscilla-tions (A perturbaiton technique). *Journal of Sound and Vibration*, 1984, 95: 525∼530

3 Nayfeh AH, Mook DT. Nonlinear Oscillations. New York: John Wiley, 1979

4 Nayfeh AH. Introduction to Perturbation Techniques. New York: John Wiley, 1981

5 Bogoliubov V, Mitropolski YA. Asymptotic Method in the Theory of Nonlinear Oscillations. New York: Godron and Breach, 1961

6 Sanders JA, Verhulst F. Averaging Methods in Nonlinear Dynamical Systems. New York: Springer-Verlag, 1985

7 廖世俊著．陈晨，徐航译．超越摄动：同伦分析方法导论．科学出版社，　2006 (Liao SJ, ed. Chen C, Xu H, trans. Beyond Perturbation: An Introduction to Homotpy Analysis Method. Beijing: Science Press, 2006 (in Chinese))

8 Hayat T, Sajid M. On analytic solution for thin film flow of a forth grade fluid down a vertical cylinder. *Physics Letters A*, 2007, 361: 316∼322

9 Sajid M, Hayat T, Asghar S. Comparison between the HAM and HPM solutions of thin film flows of non-Newtonian fluids on a moving belt. *Nonlinear Dynamics*. On line (DOI: 10.1007/S11071-006-9140-Y)

10 He JH. Homotopy perturbation techique. *Comput Methods Appl Mech Eng*, 1999, 178: 257∼262

11 Liao SJ. On the analytic solution of magnetohydrodynamic flows of non-Newtonian fluids over a stretching sheet. *J of Fluid Mech*, 2003, 488: 189∼212

12 Liao SJ. Series solutions of unsteady boundary-layer flows over a stretching flat plate. *Studies in Applied Mathematics*, 2006, 117(3): 2529∼2539

13 孙中奎，徐伟，杨晓丽等．基于参数展开的同伦分析技术及其应用．力学学报，　2005, 37(5): 667∼672 (Sun ZK, Xu W, Yang XL, et al. A homotopy technique with the parameter expansion and its application. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2005, 37(5), 667∼672(in Chinese))

14 石玉仁，许新建，吴枝喜等．同伦分析法在求解非线性演化方程中的应用．物理学报，　2006, 55(4): 1555∼1560 (Shi YR, Xu JX, Wu ZX, et al. Application of the homotopy analysis method to solving nonlinear evolution equations. *Acta Physica Sinica*, 2006, 55(4): 1555∼1560(in Chinese))

15 Asghar S, Gulzar MM, Ayub M. Effect of partial slip on flow of a third grade fluid. *Acta Mech Sinica*, 2006, 22: 195∼198

16 Abbasbandy S. The application of the homotopy analysis method to solve a generalized Hirota-Satsuma coupled KdV equation. *Physics Letters A*, 2007, 361: 478∼483

17 Zhu SP. An exact and explicit solution for the valuation of American put options. *Quanti-Tative Finance*, 2006, 6: 229∼242

18 Liao SJ. A new branch of solutions of boundary-layer flows over a permeable stretching plate. *Int J Heat and Mass Transfer*, 2005, 48(12): 2529∼2539

19 Spiegel MR. Mathematical Handbook of Formulas and Tables. New York: McGraw-Hill, 1968

ANALYTICAL APPROXIMATIONS FOR NONLINEAR DYNAMIC SYSTEM WITH MULTIPLE LIMIT CYCLES [1)]

Cheng Jun Liao Shijun[2)]

(*School of Naval Architecture and Ocean Engineering, Shanghai Jiaotong University, Shanghai* 200030*, China*)

Abstract A modified Rayleigh oscillator with multiple limit cycles is investigated by means of a new analytical method for nonlinear problems, namely, the homotopy analysis method (HAM). The HAM is independent upon small parameters. More importantly, unlike other traditional techniques, the HAM provides us with a simple way to ensure the convergence of solution series. Thus, the HAM can be used for strongly nonlinear problems. Comparisons of the solutions given by the HAM, the method of averaging, and Runge-Kutta method show that the method of averaging is not valid for strongly nonlinear cases, and the Runge-Kutta numerical technique does not work for the instable limit cycles, however, the HAM not only works for strongly nonlinear cases, but also can give good approximations for the instable limit cycles.

Key words nonlinear oscillation, homotopy analysis method, multiple limit cycle, Rayleigh oscillator

Received 28 August 2006, revised 22 June 2007.

1) The project supported by the Program of Shanghai Subject Chief Scientist (05XD14011) and the Program for Changjiang Scholars and Innovative Research Team in University (IRT0525).

2) E-mail: sjliao@sjtu.edu.cn